# గణిత ఉపాధ్యాయుల కరదీపిక

## (Hand Book for Maths Teachers)

### 8, 9 తరగతులు

రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ,

ఆంధ్రప్రదేశ్, హైదరాబాదు.

## రూపకల్పనలో పాల్గొన్నవారు

**శ్రీ టి.వెంకటరామకుమార్,** ప్ర.ఉ., జి.ప.ఉ.పా., ములుమూడి, ఎస్.షి.ఎస్., నెల్లూరు జిల్లా.

**శ్రీ జి.అనంతరెడ్డి,** విశ్రాంత ప్ర.ఉ., రంగారెడ్డి జిల్లా.

**శ్రీ జి.వి.బి.ఎస్.ఎన్.రాజు,** ఎస్.ఎ., యం.హెచ్.ఎస్.కస్ప, విజయనగరం జిల్లా.

**శ్రీ ఎస్.ప్రసాదబాబు,** పి.జి.టి., ఎ.పి.టి.డబ్ల్యు.ఆర్.చంద్రశేఖరపురం, ఎస్.పి.ఎస్., నెల్లూరు జిల్లా.

**శ్రీ పి.సురేష్ కుమార్,** ఎస్.ఎ., జి.హెచ్.ఎస్., విజయనగర్‌కాలనీ, హైద్రాబాదుజిల్లా.

**శ్రీ పి.డి.ఎల్.గణపతిశర్మ,** ఎస్.ఎ., జి.హెచ్.ఎస్., జమిస్తాన్‌పూర్, మాణికేశ్వనగర్, హైద్రాబాదు జిల్లా.

**శ్రీ డి.వేణు,** ఎస్.ఎ., ప్రా.ఉ.పా, అల్లవాడ, చేవెల్ల (మం), రంగారెడ్డి జిల్లా.

**శ్రీ హనీఫ్ పాలివాల్,** వి.బి.ఇ.ఆర్.సి., ఉదయపూర్, రాజస్థాన్.

## విషయ నిపుణులు మరియు సంపాదకులు

**డా॥ ఎస్.సురేష్‌బాబు,** ప్రొఫెసర్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., ఆం.ప్ర., హైదరాబాదు.

**శ్రీ కె.నారాయణరెడ్డి,** లెక్చరర్, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., ఆం.ప్ర., హైదరాబాదు.

**శ్రీ కె.రాజేందర్‌రెడ్డి,** కో-ఆర్డినేటర్, గణితపాఠ్యపుస్తకాలు, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., ఆం.ప్ర., హైదరాబాదు.

## ముఖ్య విషయ నిపుణులు

**డా॥ హెచ్.కె.దివాన్,** విద్యాసలహాదారు. వి.బి.ఇ.ఆర్.సి., ఉదయపూర్, రాజస్థాన్.

## సలహాదారులు

**డా॥ ఎన్.ఉపేందర్‌రెడ్డి,** ప్రొఫెసర్ & హెడ్, కరిక్యులం, పాఠ్యపుస్తక విభాగం, ఎస్.సి.ఇ.ఆర్.టి., ఆం.ప్ర., హైదరాబాదు.

## ముఖ్యసలహాదారు

**శ్రీ జి.గోపాల్‌రెడ్డి,**
సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ, ఆంధ్రప్రదేశ్, హైదరాబాదు.

## ప్రధాన సలహాదారులు

**శ్రీమతి వి.ఉషారాణి,** ఐ.ఎ.ఎస్.,
కమీషనర్ మరియు డైరెక్టర్, పాఠశాల విద్య,
ఆంధ్రప్రదేశ్, హైదరాబాదు.

# ముందుమాట

విద్యార్థి ప్రాథమికోన్నత స్థాయి వరకు నేర్చుకున్న భావనలను, గణిత ప్రక్రియలను సమ్మిళితం చేసి గణితీకరణం చెందే విధంగా సెకండరీ స్థాయి దోహదపడుతుంది. పాఠ్యాంశాలు హేతుబద్ధంగా నేర్చుకోవడం, సమస్యలు విశ్లేషించి సాధించడం, సిద్ధాంతాలు నిరూపించడం ఈ స్థాయిలో ప్రవేశపెట్టారు. ఈ దశలో గణితం అనేది ఒక బోధనా విషయం ఇతర విషయంలో అవినాభావ సంబంధం కలిగి ఉండే విధంగా కారణాలతో కూడిన విశ్లేషణలు చేయుటలో ఉపకరిస్తుంది.

విద్యార్థులు గణితాన్ని మార్కులు సంపాదించుటకొరకు మాత్రమే కాకుండా గణిత పాఠ్య ప్రణాళికలో ఇమిడివున్న అమూర్త కీలక భావనలను నేర్చుకొనే విధంగా ఉపాధ్యాయులు ప్రోత్సహించవలసి వుంది. బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో అన్ని స్థాయిల విద్యార్థులు భాగస్వాములు అయ్యే విధంగా కృషిచేయాలి. విద్యార్థులలో గణిత పఠనంపట్ల అనుకూల దృక్పథాన్ని పెంపొందించి వారిలో విశ్వాసం కలిగించేటట్లు బోధన కొనసాగితే అది వారి జీవన గమ్యానికి దారితీస్తుంది. ఈ విధమైన జ్ఞాన నిర్మాణానికి పాఠ్యపుస్తకాలు దోహదపడుతాయి. అందుకు అనువైన రీతిలో నైపుణ్యంతో వినియోగించవలసిన బాధ్యత ఉపాధ్యాయులందరిది.

ఇలాంటి నైపుణ్యాలను పెంపొందించుటకు బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో వివిధ స్థాయిలలో చేయవలసిన సంసిద్ధత, ప్రణాళిక, తీసుకొనవలసిన జాగ్రత్తలను గుర్తుచేయుటకై ఈ కరదీపిక రూపొందించబడింది.

ఈ కరదీపికలో 1 నుంచి 3వ వరకు వున్న అధ్యాయంలో పాఠ్యపుస్తకంలోని వివిధ అధ్యాయముల యొక్క స్వరూప స్వభావాలను వివరిస్తాయి. 4వ అధ్యాయం నందు నూతనంగా ప్రవేశపెట్టబడిన గణిత భావనలను గురించి సంగ్రహముగా వివరిస్తుంది. 5వ అధ్యాయము, గణితంలోని వివిధ విభాగాల యొక్క ప్రాముఖ్యతను, భావనల క్రమము, వినియోగముల విషయములో ఉపాధ్యాయునికి పూర్తి అవగాహన కల్పించి తద్వారా విద్యార్థులలో అవగాహన పెంపొందించుటకు దోహదపడుతుంది. 6వ అధ్యాయము పాఠ్యపుస్తకమును ఉపయోగించుకొని సమర్థవంతంగా బోధనా అభ్యసనం కొనసాగించారు. ఉపాధ్యాయుని విధులు, సంసిద్ధతను వివరిస్తుంది. 7వ అధ్యాయము ఫలవంతమైన మూల్యాంకనము బోధనల కొర్కై మనం సంకల్పించిన నిరంతర సమగ్రమూల్యాంకనము యొక్క విధి విధానములను సమగ్రంగా వివరిస్తుంది.

ఈ కరదీపికను అవసరాలకు అనుగుణంగా, ఆకర్షణీయంగా ఉత్తేజ పూర్వకంగా ఉండేటట్లు తీర్చిదిద్దుటలో అవిరళ కృషిచేసిన కమిటీ సభ్యులకు, ఉపాధ్యాయులకు, తదితర సాంకేతిక నిపుణులందరికీ రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధనా శిక్షణా సంస్థ అభినందనలను తెలియజేస్తున్నది. రాబోయే కాలంలో పాఠ్య పుస్తకము మరియు కరదీపిక మరింత గుణాత్మకంగా అభివృద్ధి చెందుటకు మీ అందరి సలహాలు, సూచనలు, ఆహ్వానించడమైనది.

**సంచాలకులు**
ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ
హైదరాబాదు.

# విషయసూచిక


| విషయము | పేజి సంఖ్య |
|---|---|
| **I. అధ్యాయం :** | |
| ♦ నూతన పాఠ్యపుస్తకాలపై శిక్షణ ఎందుకు అవసరం? | 5 |
| **II. అధ్యాయం :** | |
| ♦ నూతన పాఠ్యపుస్తకాలు – పరిచయం – కీలక అంశాలు | 7 |
| **III. అధ్యాయం :** | |
| ♦ పాఠ్యపుస్తకంలో ఒక అధ్యాయం – సమగ్ర విశ్లేషణ (8వ తరగతి – నిష్పత్తి అనుపాతము) | 22 |
| **IV. అధ్యాయం :** | |
| **ప్రత్యేక అంశాలు – విశ్లేషణ** | |
| 1. రాత లెక్కలు (Verbal problems) | 27 |
| 2. సంభావ్యత (Probability) | 31 |
| 3. గణిత నిరూపణలు (Proofs in Mathematics) | 37 |
| **V. అధ్యాయం :** | |
| **అభ్యసన ఆధారపత్రాలు** | |
| 1. సంఖ్యా వ్యవస్థ | 44 |
| 2. బీజ గణితం | 51 |
| 3. రేఖా గణితం | 59 |
| 4. సాంఖ్యక శాస్త్రం – సంభావ్యత | 63 |
| 5. క్షేత్రమితి | 69 |
| **VI. అధ్యాయం :** | |
| ♦ ఉపాధ్యాయుని సన్నిద్ధత | 74 |
| **VII. అధ్యాయం :** | |
| ♦ నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనము – అవగాహన | 79 |
| **VIII. అధ్యాయం :** | |
| ♦ స్వీయ మూల్యాంకన పత్రము | 96 |

# అధ్యాయం - 1

# నూతన పాఠ్యపుస్తకాలపై శిక్షణ ఎందుకు అవసరం?

ఇప్పటి వరకు సెకండరీ విద్యావిధానములో ఎప్పటికప్పుడు మార్పులు వస్తూ ఉన్నవి. సమాజ అవసరాలకు అనుగుణంగా, అందుబాటులోని జ్ఞానమునకు అనుగుణంగా మార్పులు వస్తూ ఉన్నవి. ఉపాధ్యాయ కేంద్రీయ విద్య బదులుగా విద్యార్థి కేంద్రీయ విద్య అవసరమని భావించాము. కాని పాఠ్యపుస్తకములు తదనుగుణంగా మార్పులు చెంది యుండలేదు. అందుకే అది 2011-12 వరకు ఆశయంగానే మిగిలిపోయినది.

NCF-2005, RTE-2009 లకు అనుగుణంగా మొట్టమొదటిసారిగా మనరాష్ట్ర ప్రభుత్వం ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్ర విద్యాప్రణాళికా పరిధి చట్రం - 2011 తయారుచేయడం జరిగినది. ఈ చట్రం ప్రకారం - పిల్లలు తమకున్న సహజ శక్తి సామర్థ్యాల ద్వారా బడి బయటి జీవితంలో అనుసంధానం చేస్తూ పరస్పర ప్రతిచర్యలు, ప్రాజెక్టు పనులు అన్వేషణలు, ప్రయోగాలు, విశ్లేషణలు చేయుచూ పాఠ్యాంశమును అవగాహన చేసుకొనే విధంగా పాఠ్యపుస్తకాలు, తరగతి బోధన ఉండాలి. ఈ అంశాలన్నింటినీ క్రోడీకరిస్తూ, విద్యార్థుల మానసిక స్థాయిలకు సామాజిక అవసరాలకు, ఉన్నత విద్య అవసరాలకు అనుగుణంగా 1 నుండి 10వ తరగతి వరకు పాఠ్యప్రణాళిక (Syllabus) కూర్చుకొని ప్రస్తుత పాఠ్య పుస్తకాలు రాయబడ్డాయి. క్రొత్త ప్రణాళిక ప్రకారం బోధనా వ్యూహాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ సందర్భంలో ఉపాధ్యాయులందరు గణిత బోధన పట్ల తమ అభిప్రాయములను, తాము అవలంభిస్తున్న బోధనావ్యూహాలను పునః పరిశీలన చేసుకొనవలసిన అవసరం ఎంతైనా ఉన్నది కనుక నూతన పాఠ్యపుస్తకాలపై ఉపాధ్యాయులకు శిక్షణ అవసరమైయున్నది.

గత సంవత్సరం 6, 7 తరగతులకు అమలుచేయబడిన నూతన పాఠ్యపుస్తకములపై రాష్ట్రంలోని అందరు ఉపాధ్యాయులకు శిక్షణ ఇవ్వబడినది. కానీ 2012-13 విద్యాసంవత్సరంలో చివరలో 'నూతన పాఠ్యపుస్తకాల అమలు - బోధనా వ్యూహాలపై పరిశీలన' అంశంపై రాష్ట్రమంతటా రాష్ట్రవిద్య పరిశోధన శిక్షణా సంస్థ (SCERT) జరిపిన సర్వే ఫలితాలు ఆశాజనకంగా లేవు.

అందరు ఉపాధ్యాయులు పుస్తకాలు చాలా బాగున్నాయి, అభ్యాసాలు బాగున్నాయి, భావనల పరిచయం బాగున్నది' అని చెప్పినప్పటికి కింది లోపాలు ప్రస్ఫుటంగాకనిపించాయి.

- పాఠ్యపుస్తకములోని 'ముందుమాట', 'ఉపాధ్యాయుల సూచనలు' మరియు 'విద్యాప్రమాణాలు చదివిన వారు కొద్ది శాతం మాత్రమే.
- గణిత బోధనలో తరగతి గదిలో విద్యార్థులు అభ్యాసములనే కాకుండా పాఠ్యాంశంలోని అన్ని అంశములపై అవగాహన పొందునట్లు పాఠ్యపుస్తక పఠనం, అందులోని చిన్న ఖాళీలను పూరించడం, చర్చించడం జరుగునట్లుగా ఉపాధ్యాయుడు తమ బోధనా వ్యూహాలను కల్పించుకోవాలి. కానీ అట్లు ఆచరిస్తున్న ఉపాధ్యాయులు 10 శాతం మాత్రమే.
- గణిత భావనల సమగ్ర అవగాహన కొరకు ఇవ్వబడిన నిర్మాణాత్మక అభ్యాసములు అనగా 'ఇవి చేయండి', 'ప్రయత్నించండి', 'ఆలోచించండి - చర్చించండి' మొదలగు అభ్యాసములను విద్యార్థులచే చేయించే ఉపాధ్యాయులు అతి కొద్దిమంది మాత్రమే.
- తరగతి బోధనలో విద్యార్థుల భాగస్వామ్యమును ఆహ్వానిస్తున్నవారి శాతం కూడా ఆశించిన స్థాయిలో లేదు.
- ప్రాజెక్టు పనులు చేస్తున్న / చేయించుతున్న ఉపాధ్యాయులు ఒకరిద్దరు మాత్రమే.
- నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం గురించి అవగాహన చేసుకొని అమలు చేయుచున్న ఉపాధ్యాయులు చాలా తక్కువ.

ఈ లోపాలన్నింటిని సరిచేయుటకు పాఠ్యపుస్తకములోని మూల సూత్రాల యొక్క ప్రాముఖ్యతను / ఆవశ్యకతను గురించి చర్చించుటకు, 8, 9 తరగతుల గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని నూతన అధ్యాయముల సమగ్ర అవగాహనకొరకు ఈ శిక్షణా కార్యక్రమము నిర్దేశించబడినది.

**శిక్షణా కార్యక్రమ లక్ష్యాలు :**

- 8, 9 తరగతుల నూతన పాఠ్య పుస్తకములలోని తాత్వికత, మౌళిక సూత్రలపై అవగాహన చేసుకొనుట.
- గణితంలోని వివిధ రంగాల గురించి క్షుణ్ణముగా చర్చించి అర్థం చేసుకొనుట.
- నూతన బోధనా వ్యూహాలను ఆకళింపు చేసుకొని, మాదిరి పాఠ్యప్రణాళిక, కృత్యములు రచించుట.
- నిర్మాణాత్మక అభ్యాసములు – 'ఇవిచేయండి', 'ప్రయత్నించండి', 'ఆలోచించండి – చర్చించండి' మొదలగు అభ్యాసముల ప్రాముఖ్యత, నిర్వహణల గురించి అవగాహన పొందుట.
- తరగతి గదిలో గణిత బోధనలో కృత్యముల నిర్వహణ గురించి తెలుసుకొనుట.
- విద్యార్థుల అభ్యసనమును మదింపు చేయుటలో భాగంగా, నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనము గురించి కూలంకషంగా అవగాహన పొందుట.
- తరగతి వారీగా విద్యాప్రమాణములవారీగా నమూనా ప్రశ్నలు తయారుచేయుట.
- తరగతి వారీగా విద్యాప్రమాణముల వారీగా ప్రశాపత్రముల తయారీకి, భారత్వ పట్టికలు ఉపయోగించుటకు సూచనలు పొందుట.
- అకడమిక్ కాలెండరుపై అవగాహన, అమలు.

పాఠశాలలో గణితం యొక్క సంకుచితమైన ఉద్దేశ్యం ఏమిటంటే, విద్యార్థులు సంఖ్యలు, సంఖ్యలతో గణిత ప్రక్రియలు, కొలతలు, దశాంశాలు, శాతాలు మొదలయిన సంఖ్యా పరిజ్ఞానాన్ని పెంపొందించుకోవాలి. దాని ఉన్నత ఉద్దేశ్యం ఏమిటంటే, విద్యార్థులలో గణిత పరంగా ఆలోచించి, చింతన చేయడానికి అవసరమైన వనరులను పెంపొందించడం, వారు తాము ఊహించిన విషయాల నుండి తార్కిక నిర్ణయాల వరకు అన్వేషణ కొనసాగించగలిగేలా చేయటం మరియు అమూర్త భావనలను అర్థం చేసుకొని సమర్థవంతంగా వాడగల్గడం.

– NCF 2005

## అధ్యాయం - 2

# నూతన పాఠ్యపుస్తకాలు - పరిచయం - కీలక అంశాలు

**ఉపోద్ఘాతం :**

పిల్లలను తమ సంస్కృతి, సాంప్రదాయాలు, వారసత్వాన్ని ప్రశంసిస్తూ సామాజిక మార్పుకు దోహదపడే వ్యక్తులుగా తీర్చిదిద్దడమనేది విద్యయొక్క ప్రాథమిక లక్ష్యం. 'విద్య'కు మన రాజ్యాంగంలో సముచిత స్థానం కల్పించి, జాతీయస్థాయిలో అనేక సంస్కరణలు చేయబడ్డాయి. మన దేశంలో రాష్ట్రాలన్నీ తమ స్వయం ప్రతిపత్తిని కాపాడుకుంటూ, దేశసమైక్యత ప్రాతిపదికగా, రాష్ట్రాల అవసరాలకు అనుగుణంగా విద్యావ్యవస్థలు రూపొందించుకున్నాయి. 2000సం॥ నుండి మన దేశంలో 'అందరికీ విద్య' నినాదం విస్తృతమై, అక్షరాస్యత పెంపొందించడమే కాకుండా, 6-14సం॥ బాలబాలికలందరికీ గుణాత్మకమైన నిర్బంద ప్రాథమిక విద్య అందించాలనే లక్ష్యం బలపడింది. జాతీయ విద్యా ప్రణాళికా చట్రం (2005), ఉచిత నిర్బంధ విద్యా హక్కు చట్టం (2009) ఈ దిశలో ఒక ముందుడుగు వేసాయి. ఉన్నతమైన విద్యాలక్ష్యాలు, నైతిక విలువలు పెంపొందించే విధంగా మన రాష్ట్రం కూడా రాష్ట్ర విద్యా ప్రణాళికా పరిధిపత్రం (2011) రూపొందించి తదనుగుణంగా పాఠ్య, పాఠ్యేతర అంశాలకు చెందిన 18 అంశాలతో ఆధార పత్రాలు విడుదల చేసింది.

రాష్ట్ర విద్యా ప్రణాళిక పరిధి పత్రం - 2011 ప్రకారం పాఠ్యపుస్తకాలు పిల్లల్ని ఆలోచించేలా, పిల్లలు తమకున్న సహజమైన శక్తి సామర్థ్యాలు వినియోగించుకొని నేర్చుకోవడానికి దోహదపడాలని సూచించింది. పిల్లలు పొందిన జ్ఞానాన్ని నిత్యజీవితంలో వినియోగించుకోవడానికి పాఠ్యపుస్తక పరిధిని దాటి అదనపు అంశాలు అభ్యసించడానికి అవకాశం కల్పించేలా ఉండాలని తెలిపింది. ఆలోచింపజేసే అభ్యాసాల ద్వారా నిర్ధారిత విద్యాప్రమాణాలు విద్యార్థులు పొందగలగాలని సూచించింది. వీటిని దృష్టిలో పెట్టుకొని నూతన పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించబడ్డాయి.

మన రాష్ట్రంలో 2011-12 సం॥లో 1,2 తరగతులకు 2012-13సం॥లో 3,6,7 తరగతులకు, 2013-14 విద్యాసంవత్సరానికి 4,5,8,9 తరగతుల పాఠ్యపుస్తకాలను రాష్ట్రవిద్య పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ రూపకల్పన చేసింది.

ఈ నూతన పాఠ్యపుస్తకాల యొక్క తాత్విక అంశాల అవగాహన చేసుకునే ముందు క్రింది ప్రశ్నల గురించి ఆలోచించి, చర్చించండి.

1. పాఠ్యపుస్తకాలు ఏఏ కీలక సూత్రాల ఆధారంగా తయారయ్యాయి?
2. నూతన పాఠ్యపుస్తకాలలోని ప్రత్యేకతలు ఏమిటి?
3. 8,9 తరగతుల పాఠ్యపుస్తకాలలో అంశాల ఎంపిక ఎలా జరిగింది?
4. పాఠ్యపుస్తకంలో ఏ అంశాలకు అత్యధిక ప్రాధాన్యత ఇచ్చారు?
5. పాఠ్యపుస్తకంలో అధ్యాయాల అమరిక ఎలా వుంది?
6. ముందు మాట, పీఠికలలో ఏఏ విషయాలు ప్రధానంగా చర్చించారు?

## ♦ నూతన గణిత పాఠ్యపుస్తకాల తయారీకి ఆధారమైన కీలక సూత్రాలు :

- పిల్లల సహజసిద్ధమైన శక్తి సామర్థ్యాలు
- పిల్లలభాష అనుభవాలు
- పాఠ్యాంశాలలో బడిబయట జీవితంలో అనుసంధానం
- బట్టీ పద్ధతికి స్వస్తి చెప్పే ప్రతి చర్యలు
- పాఠ్యపుస్తకాలకే పరిమితంకాని అంశాలు
- ప్రాజెక్టులద్వారా అన్వేషణలు
- నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం
- సామాజిక, నిర్మాణాత్మక విధానాలు
- విద్యార్థికి స్వేచ్ఛ, ప్రశ్నించే తత్వం
- నిర్ధారించిన విద్యాప్రమాణాలు
- సృజనాత్మకత, కల్పనాశక్తి
- విభిన్నమైన సమస్యాసాధన ప్రక్రియలు

| వరుస సంఖ్య | అంశం | ఆవశ్యకత | పాఠ్యపుస్తకాలలో వివరణలు |
|---|---|---|---|
| 1 | గణితభాష సరళంగా ఉండడం స్వయం అభ్యసనానికి ప్రోత్సహించేలా ఉండడం. | పాఠశాల స్థాయిలో పిల్లల వాడుక భాషకు అనుగుణంగా గణిత భాషను జోడించి అంశాలు వివరించడంవలన పిల్లలు పాఠ్యాంశాలు తమ కోసంగా భావిస్తారు. అంశాలు, కృత్యాలు స్వయంగా చదువుకొని, సమస్యలు సాధించడం ద్వారా స్వీయ అభ్యసనానికి దారితీస్తుంది. | 8, 9 తరగతులు అన్ని పాఠ్యాంశాలలో వినియోగించిన భాష అన్ని ప్రాంతాలలో గల వాడుక భాషకు సంబంధించి, సరళంగా ఉండే పదాలు తీసుకొని రాయబడినవి. గ్రాంథిక భాషలో పదాలు తొలగించబడినవి. అవసరమైన సందర్భాలలో నూతన గణిత పదాలకు, అంశాలకు వివరణలు ఇవ్వబడినవి. |
| 2 | పూర్వజ్ఞానాన్ని పరిశీలించే కృత్యాలు | విద్యార్థులు ముందు తరగతులలో నేర్చుకున్న అంశాలను, నేర్చుకోబోయే నూతన అంశాలకు వారధిగా ఉండేటట్లు పూర్వజ్ఞానాన్ని ప్రశ్నల రూపంలో కాకుండా నిజజీవిత సన్నివేశాలను, అనుభవాలను జోడించి రాబట్టాలి. దీనివలన నేర్చుకోబోయే అంశాలపట్ల పూర్తిస్థాయి సన్నద్ధత ఏర్పడుతుంది. | 8వ తరగతి<br>1. అకరణీయ సంఖ్యలు – దుకాణంలో పెన్నులు కొనడం సిమ్లాలో ఉష్ణోగ్రతల నమోదు<br>2. చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు – చతుర్భుజాల రకాలు, వాటి ధర్మాలు<br>3. పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు రేఖా చిత్రాలు – ఒలంపిక్ క్రీడలలో పతకాల పట్టిక<br>4. సమతల పటాల వైశాల్యములు – ఇంటి స్థలాలు, ఆకారాలు<br><br>9వ తరగతి<br>1. బహుపదులు – తోట మడిలో మొక్కలు నాటడం<br>2. సరళరేఖలు, కోణాలు – ఇళ్లు, వంతెనలు, గోపురాలు మొ॥ వాటి పటాలు. |

| వరుస సంఖ్య | అంశం | ఆవశ్యకత | పాఠ్యపుస్తకాలలో వివరణలు |
|---|---|---|---|
| 3 | స్థానిక కళలు, సంస్కృతి, ఉత్పాదక కార్యకలాపాలు, స్థానిక అంశాలకు పాఠ్యాంశాలలో చోటు కల్పించడం. | ప్రతి ప్రాంతానికి ఒక సంస్కృతి, ఆచార వ్యవహారాలు ఉండి వ్యక్తులు వివిధ ఉత్పాదక కార్యక్రమాలలో పాల్గొంటారు. పాఠ్యాంశాలలో వీటికి సందర్భానుసారంగా చోటు కల్పించడంవలన సమస్యల సాధనా నైపుణ్యాలు పెంపొందడంతోబాటు నూతన సమస్యల ఆవిష్కరణకు దారితీస్తాయి. | 8వ తరగతి<br>1. ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమాకరణం<br>– అభ్యాసం 2.2లో 6, 7, 14వ ప్రశ్నలు ప్రయాణ సాధనాలను, పిజ్జాతయారీని, కరెన్సీ విలువలను తెలుపుతాయి. (పేజీ. 43)<br>2. అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట<br>– శాతాలు గురించి వివరించే సందర్భంలో ఉన్నత పాఠశాల విద్యార్థులు విరాళాలు సేకరించుట (పేజీ. 99), విలువ ఆధారిత పన్ను (VAT) వివరించే క్రమంలో మెడికల్ బిల్లు (పేజీ.109) మొదలగునవి.<br><br>9వ తరగతి<br>1. నిరూపక జ్యామితి – పరిచయంతో విద్యార్థుల వరుసక్రమం, పట్టణాలలో వీధుల నిర్మాణం (పేజీ. 107, 109)<br>2. ఉపరితల వైశాల్యం – ఘనపరిమాణం అభ్యాసాల సమస్యలలో వాడుకలో నున్న పెట్టెలు, స్థూపాకార వస్తువులు స్థానికంగా పండే మొక్కజొన్న కంకెలు మొదలగునవి చూపబడ్డాయి. |

| వరుస సంఖ్య | అంశం | ఆవశ్యకత | పాఠ్యపుస్తకాలలో వివరణలు |
|---|---|---|---|
| 4 | సమస్యా సాధన తార్కికత – కారణాలు చెప్పడం, వ్యక్తీకరించడం, ప్రాతినిధ్యపరచడం, అనుసంధానం వంటి మౌలిక అంశాల ప్రాతిపదికతో గణిత విద్యాప్రమాణాలు | గణితంలో మౌలిక ప్రక్రియలతో పాఠ్యాంశ అంశాలను అనుసంధానం చేసి గణిత విద్యాప్రమాణాలను రూపొందిస్తాం. విద్యాప్రమాణాలు అనేవి ఒక స్థాయిలో, ఒక అంశానికి సంబంధించి ఒక మౌలిక ప్రక్రియలో ఆశించదగిన ఫలితం. విద్యాప్రమాణాలు విద్యార్థుల స్థాయిని మదింపు చేయడానికి దోహదపడతాయి. | 8, 9 తరగతుల గణిత పాఠ్యాంశాలు అన్నియూ మౌలిక ప్రక్రియల ఆధారంగా రాయబడ్డాయి. ప్రతీ అధ్యాయంలోగల అంశాల ఆధారంగా విద్యా ప్రమాణాలను రూపొందించుకొని, వాటి సాధన కొరకు కృషిచేయాలి.<br>ఉదా:– 1) $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{-6}{5} + \frac{-13}{7}$ ను సూక్ష్మీకరించండి. (సమస్యాసాధన) – 8వ తరగతి (పేజి.17)<br>2) దత్త భుజంను భూమిగా తీసుకొని, దత్త కోణం తెలిస్తే, సమద్విబాహుత్రిభుజం నిర్మించి నిర్మాణం నిరూపించండి.<br>3) $32.5 \times 10^{-4}$ ను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తీకరించండి. –8వతరగతి (పేజి.94) (వ్యక్తీకరించడం)<br>4) $x-2y = 3$ యొక్క రేఖాచిత్రం గీయుము – 9వ తరగతి (పేజి.136) (ప్రాతినిధ్యపరచడం).<br>5) ఒక గ్రామంలో రామయ్య అనే వ్యక్తికి చతర్భుజాకారంలో ఖాళీస్థలం కలదు. ఆ గ్రామ పంచాయితీలో పాఠశాల నిర్మాణానికి అతని స్థలంలో ఒక మూల కొంత భాగం కావల్సి వచ్చింది. ఆయన స్థలాన్ని ఇవ్వడానికి అంగీకరిస్తూ, దానికి బదులుగా అంతే వైశాల్యం గల స్థలాన్ని పొందితే ఏ విధంగా ఆ స్థలం వస్తుందో వివరించండి.<br>(అనుసంధానం చేయడం) – (9వ తరగతి – పేజి.258) |

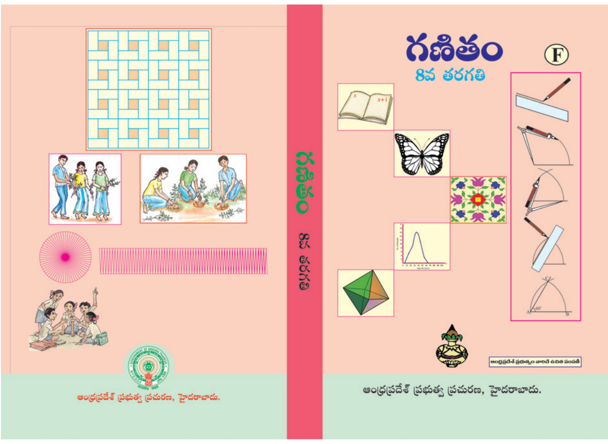
| వరుస సంఖ్య | అంశం | ఆవశ్యకత | పాఠ్యపుస్తకాలలో వివరణలు |
|---|---|---|---|
| 5 | 'ఇవిచేయండి', 'ప్రయత్నించండి', ఆలోచించి చర్చించండి వంటి శీర్షికల ద్వారా నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం. | 'ఇవి చేయండి' శీర్షిక కింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలు ఉపాధ్యాయుడు తరగతి గది నిర్వహణలో భాగంగా విద్యార్థులను నిరంతరం సమగ్రముగా మూల్యాంకనం చేయడానికి దోహదపడతాయి. కొన్ని అంశాలు చర్చించిన పిదప ఇవ్వబడిన ఇటువంటి ప్రశ్నలు విద్యార్థుల స్వీయ మూల్యాంకనానికి సహకరిస్తాయి. "ప్రయత్నించండి", "ఆలోచించి – చర్చించండి" శీర్షికల కింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలు పిల్లలు సమూహాలలో తార్కికంగా చర్చించుకొని సమాధానాలు ఇవ్వడానికి సహకరిస్తాయి. | 8, 9 తరగతుల అన్ని అధ్యాయాలలో ఇటువంటి శీర్షికలు పొందుపర్చడమైనది.<br>**ఇవిచేయండి : పాఠ్యాంశ అవగాహనల భాగంగా వెంటనే సమాధానం చెప్పగలిగేవి.**<br>ఉదా:– 8వ తరగతిలో పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు, రేఖాచిత్రాలు పాఠ్యాంశంలో క్రికెట్ ఆటగాళ్ల ఎత్తుల మధ్యగతం కనుగొనుట. (పే. 154)<br>**ప్రయత్నించండి : తార్కికతో కూడిన సమాధానాలిచ్చు ప్రశ్నలు.**<br>ఉదా:– $9^2$ మరియు $11^2$ మధ్య 37 పరిపూర్ణ వర్గం లేని సంఖ్యలు ఉన్నాయని (వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు) రేహాన్ చెప్పాడు. ఇది సరియేనా? కారణం తెల్పండి (పేజి. 128)<br>**ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి :**<br>ఉదా:– ప్రతీ మూడు నెలలకు వడ్డీని లెక్కకట్టిన చక్రవడ్డీ ఎలా మారును? ఒక సంవత్సరములో ఎన్ని కాల వ్యవధులు వస్తాయి? మూడు నెలలకు వడ్డీరేటు సంవత్సర వడ్డీరేటులో ఎంత భాగము? మీ మిత్రులతో చర్చించండి. (పేజి. 115) |

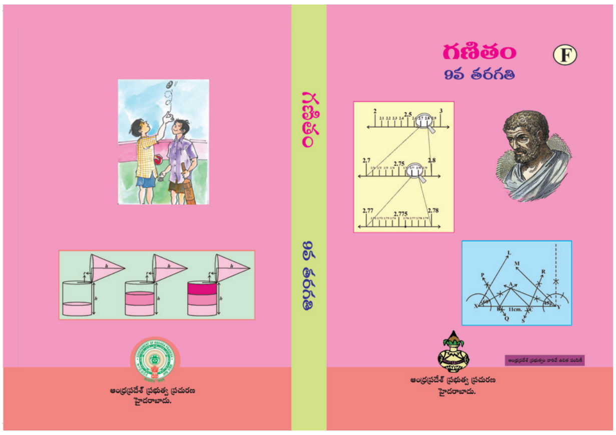
| వరుస సంఖ్య | అంశం | ఆవశ్యకత | పాఠ్యపుస్తకాలలో వివరణలు |
|---|---|---|---|
| 6 | బట్టీ నుండి విముక్తి కల్పించి, జ్ఞాన నిర్మాణానికి ప్రాధాన్యత | జ్ఞాన సముపార్జన కన్నా జ్ఞాన నిర్మాణంకే విద్య తోడ్పడాలి. తరగతి గదిలో బోధన ఈ దిశలో జరగాలి. అదే విధంగా పాఠ్యాంశాల నిర్మాణ క్రమం ఆధారపడి ఉండాలి. తరగతిగదిలో నేర్చుకున్న అంశాలు, విద్యార్థులు తమ స్వీయ అనుభవాలను జోడించి, నిర్మాణాత్మకంగా నూతన ఆవిష్కరణలు చేయగలగాలి. దీని వలన ఒకే అంశాన్ని వల్లెవేసే స్థాయి నుండి బయటపడతారు. | గణిత పాఠ్యాంశాలలో జ్ఞాన నిర్మాణానికి ప్రాధాన్యత కల్పించే విధంగా అంశాలు, భావాలు ప్రవేశపెట్టబడ్డాయి.<br>ఉదాహరణకు 8వ తరగతిలో 'చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు' అధ్యాయంలో ఏకైక చతుర్భుజ నిర్మాణానికి ఏ అయిదు కొలతలు సరిపడతాయి అనే అంశానికి సంబంధించి వివిధ కృత్యాలు ప్రవేశపెట్టబడినాయి. (పేజి. 59, 60). అదే విధంగా 9వ తరగతిలో 'సాంఖ్యక శాస్త్రం' అధ్యాయంలో నిజజీవిత సంఘటనలను జోడించి 'దత్తాంశం' గురించి విస్తృతంగా చర్చించిన పిదప నిర్వచనాలు రాబట్టబడ్డాయి. (పేజి.194, 195) |
| 7 | స్వేచ్ఛగా వ్యక్తీకరించేదిగా, ప్రశ్నించే స్థాయి పెంపొందించుట. | విద్యార్థులలో జ్ఞాన నిర్మాణం సక్రమంగా జరగాలంటే ప్రతీ అంశాన్ని ఎలా? ఎందుకు? అన్ని ప్రశ్నించుకొనేస్థాయి కల్పించాలి. విద్యార్థులు తమను తాము ప్రశ్నించుకోవాలి. పుస్తకాన్ని ప్రశ్నించాలి. తోటి విద్యార్థులను ప్రశ్నించాలి. ఉపాధ్యాయులను ప్రశ్నించాలి. దీనికి స్వేచ్ఛాయుత వాతావరణం, తరగతి గదిలో ఉపాధ్యాయుడు కల్పించాలి. తరగతి బయట సమాజం కల్పించాలి. ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఏవైనా కావచ్చు వాటిని క్రమయుతంగా వ్యవస్థీకరించే స్థాయి తరగతి బోధనవలన సాధ్యమౌతుంది. | నూతన గణిత పాఠ్యాంశాలలో విద్యార్థులు స్వేచ్ఛగా ప్రశ్నించే విధంగానూ తోటివారితో చర్చించి సమాధానాలు ఇచ్చే విధంగా అంశాలు, అభ్యాసాలు ఇవ్వబడ్డాయి.<br>ఉదాహరణకు 8వ తరగతి "ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకాలు" అధ్యాయంలో అభ్యాసం 4.2లో 5వ ప్రశ్న (పేజి.95).<br>9వ తరగతి "చతుర్భుజాలు" అధ్యాయంలో "అన్ని చతురస్రాలు రాంబస్‌లే" అనే అంశానికి చెందిన సంభాషణ (పేజి.176) |

| వరుస సంఖ్య | అంశం | ఆవశ్యకత | పాఠ్యపుస్తకాలలో వివరణలు |
|---|---|---|---|
| 8 | వివిధ రకాల సమస్యల సాధన కొరకు అనేక ప్రత్యుదహరణలు / అర్థవంతంగా ఆనందంగా నేర్చుకోవడానికి వీలైనన్ని అభ్యాసాల సమస్యలు. | ప్రతీ అధ్యాయంలో అభ్యాసాలలో సమస్యలు పిల్లలు స్వయంగా చేయడానికి అవకాశం కల్పించాలి. ఈ సమస్యల సాధనలో ఇమిడివున్న సోపానాలను, క్రమ బద్ధమైన ఆలోచనావిధానాన్ని అలవర్చడానికి అనేక ప్రత్యుదహరణలను విరివిగా ఇవ్వవలసిన అవసరం ఉంది. ఉదాహరణల సాధనలో ఇమిడివున్న తార్కికతను అర్థం చేసుకోవల్సిన అవసరం విద్యార్థికి, అవగాహన పర్చవల్సిన బాధ్యత ఉపాధ్యాయునికి ఉంటుంది. అభ్యాసాలలో సమస్యల మోతాదుకు మించితే అవి విసుగు పుట్టించి గణితం పట్ల భయం పెంపొందింపచేయవచ్చు. విద్యార్థులు స్వయంగా తామే ప్రశ్నలు, సమస్యలు రూపొందించుకొనే స్థాయికి చేరాలి. | నూతన గణిత పాఠ్యపుస్తక అధ్యాయాలలో ఇవ్వబడిన అభ్యాసాలు తక్కువగా ఇచ్చి అనేక ప్రత్యుదహరణలు ఇవ్వబడినవి.<br>ఉదా:- 8వ తరగతి అధ్యాయం "వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు"లో అభ్యాసాలు (5) ఉదాహరణలు (15). ఏ అభ్యాసంలో పదికి మించి ప్రశ్నలు ఇవ్వలేదు.<br>9వ తరగతి అధ్యాయం "త్రిభుజాలు" లో అభ్యాసాలు (4), ఉదాహరణలు (15) ఇవ్వబడ్డాయి. |
| 9 | వివేచన, విచక్షణతో కూడిన హేతుబద్ధమైన జ్యామితీయ నిర్మాణాలు. | రేఖాగణిత నిర్మాణాలు గణిత అధ్యయనంలో ప్రాచీన కాలం నుండి ప్రముఖ పాత్ర వహిస్తున్నాయి. ప్రాథమిక రేఖాగణిత నిర్మాణాల నియమాలను యూక్లిడ్ కాలం నుండి అనుసరిస్తున్నాం. వీటి నిర్మాణంలో అనుభూతి, సౌందర్యంతోబాటు ప్రతీ నిర్మాణంలో తార్కికతతో కూడిన హేతుబద్ధత దాగి ఉంటుంది. కొలతలు లేని కొలబద్ద (రూలర్), వృత్తలేఖిని (కాంపాస్)తో చేసే నిర్మాణాలలో ఖచ్చితత్వం, ప్రామాణికత ఉంటుంది. పాఠశాల స్థాయిలోనే పిల్లలకు వీటిని అలవర్చాలి. ఇవి పై తరగతుల్లో, ఇంజనీరింగ్ విద్యలో బాగా ఉపయోగపడతాయి. | 8వ తరగతి గణితంలో "చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు" 9వ తరగతి గణితంలో "జ్యామితీయ నిర్మాణాలు" అనే రెండు అధ్యాయాలలో నిర్మాణ శైలిని ప్రత్యేకంగా చర్చించడం జరిగింది. నిర్మాణ అవసరాన్ని గుర్తించడం, కావల్సిన కొలతలు గుర్తించడం, తగిన పరికరాల ఎంపిక, నిర్మాణం చేసే విధానం, క్రమయుతంగా వర్ణించడంతోబాటు తార్కికతతో నిర్మాణాన్ని సమర్థించడం ఇవ్వబడ్డాయి.<br>ఉదా:- నిర్మాణం 3.2.1. (పేజి.65, 66) 8వ తరగతి<br>నిర్మాణం 13.3.1 (పేజి.284, 285) 9వ తరగతి |

# నూతన గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు – ప్రత్యేకతలు

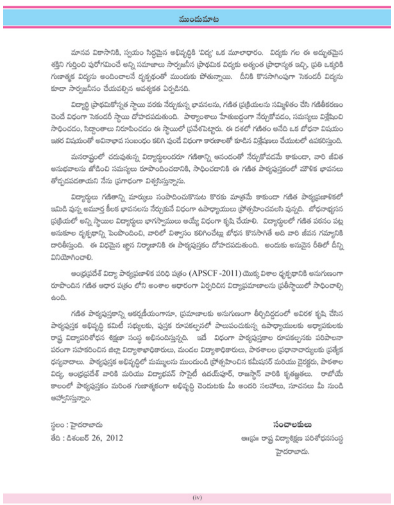
## a) ముఖచిత్రాలు



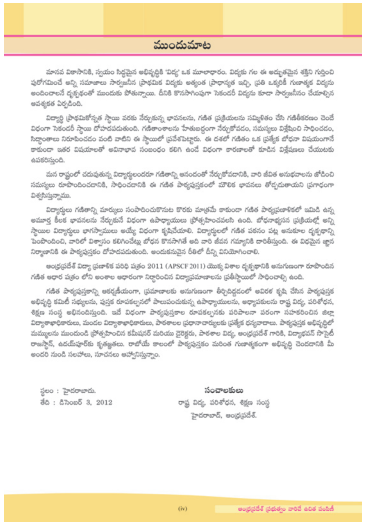




## b) ముందుమాట

8వ తరగతి

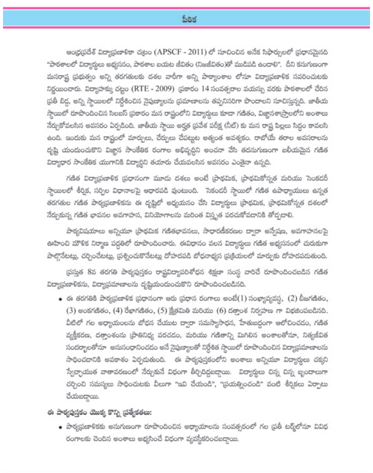


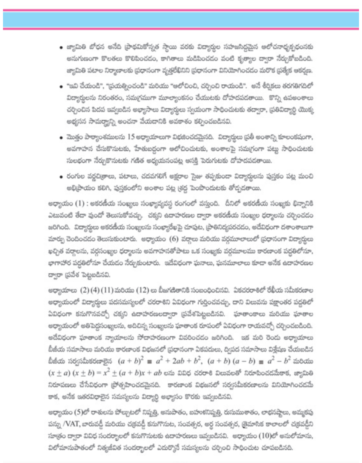

9వ తరగతి

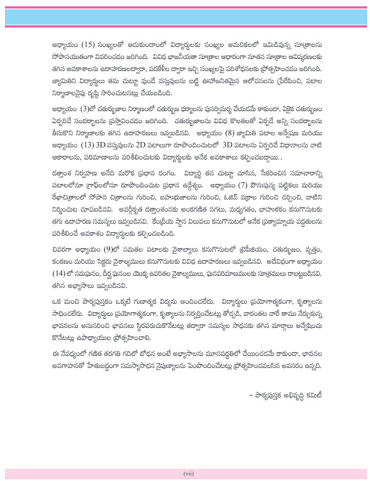



## c) పీఠిక

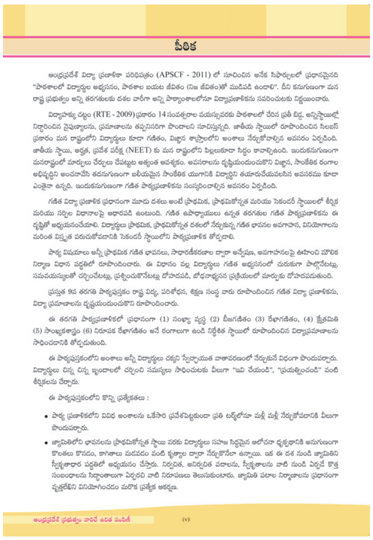
8వ తరగతి

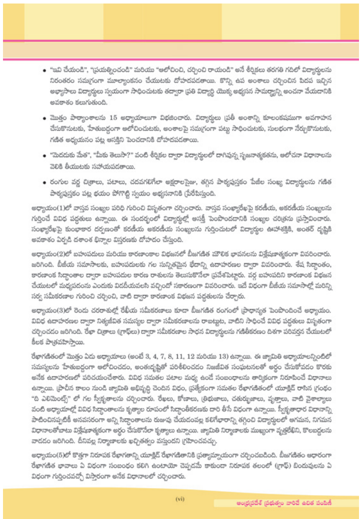




## 9వ తరగతి





# d) యూనిట్ల విభజన

## 8వ తరగతి

### విషయసూచిక


| అధ్యాయాల సంఖ్య | అధ్యాయాలు | సిలబస్ పూర్తి చేయవలసిన కాలం | పేజీ సంఖ్య |
|---|---|---|---|
| 1 | అకరణీయ సంఖ్యలు | జూన్ | 1-33 |
| 2 | ఏకచరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు | జూలై | 34-58 |
| 3 | చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు | జూలై | 59-80 |
| 4 | ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాలు | జూలై,ఆగస్టు | 81-95 |
| 5 | అనుపాతముతో రాశులను పోల్చుట | ఆగస్టు | 96-121 |
| 6 | వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు | సెప్టెంబరు | 122-147 |
| 7 | పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు, రేఖాచిత్రములు | సెప్టెంబరు, అక్టోబరు | 148-180 |
| 8 | జ్యామితీయ పటాల అన్వేషణ | అక్టోబరు | 181-198 |
| 9 | సమతల పటముల వైశాల్యములు | నవంబరు | 199-230 |
| 10 | అనులోమ మరియు విలోమ అనుపాతములు | నవంబరు, డిసెంబర్ | 231-247 |
| 11 | బీజీయ సమాసాలు | డిసెంబర్ | 248-266 |
| 12 | కారణాంక విభజన | జనవరి | 267-281 |
| 13 | త్రిమితీయ వస్తువులను ద్విమితీయంగా చూపుట | ఫిబ్రవరి | 282-296 |
| 14 | ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణం (ఘనము-దీర్ఘఘనము) | ఫిబ్రవరి, మార్చి | 297-310 |
| 15 | సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం | మార్చి | 311-336 |


(ix)

## 9వ తరగతి

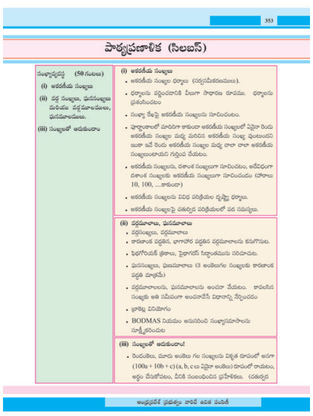
### విషయసూచిక

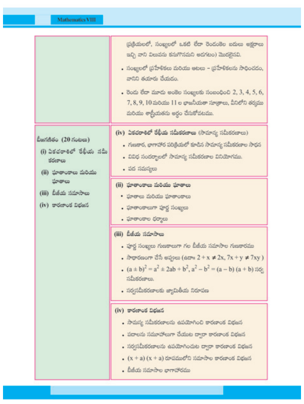

| అధ్యాయం సంఖ్య | విషయము | పాఠ్యప్రణాళిక పూర్తిచేయుకాలం | పేజీసంఖ్య |
|---|---|---|---|
| 1 | వాస్తవ సంఖ్యలు | జూన్ | 1-26 |
| 2 | బహుపదులు మరియు కారణాంక విభజన | జూలై | 27-58 |
| 3 | జ్యామితీయ మూలాలు | జూలై | 59-70 |
| 4 | సరళ రేఖలు మరియు కోణములు | జూలై, ఆగస్టు | 71-106 |
| 5 | నిరూపక జ్యామితి | ఆగస్టు | 107-123 |
| 6 | రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు | సెప్టెంబర్ | 124-147 |
| 7 | త్రిభుజాలు | సెప్టెంబర్/ అక్టోబర్ | 148-173 |
| 8 | చతుర్భుజాలు | అక్టోబర్ | 174-193 |
| 9 | సాంఖ్యక శాస్త్రము | నవంబర్ | 194-213 |
| 10 | ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములు | నవంబర్/ డిసెంబర్ | 214-243 |
| 11 | వైశాల్యాలు | డిసెంబర్ | 244-259 |
| 12 | వృత్తాలు | జనవరి | 260-279 |
| 13 | జ్యామితీయ నిర్మాణాలు | ఫిబ్రవరి | 280-291 |
| 14 | సంభావ్యత | ఫిబ్రవరి/ మార్చి | 292-309 |
| 15 | గణితములో నిరూపణలు | మార్చి | 310-327 |

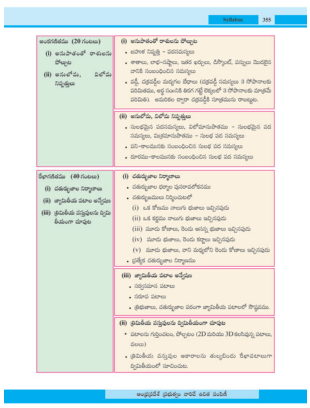

ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ (ix)

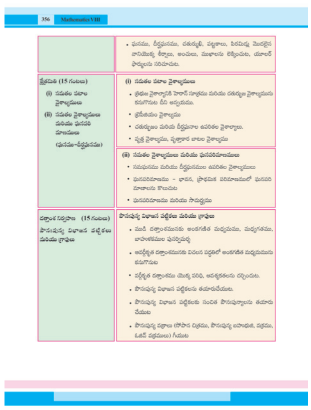
# e) సిలబస్

## 8వ తరగతి

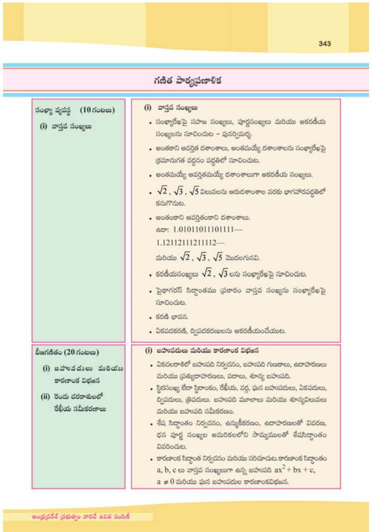
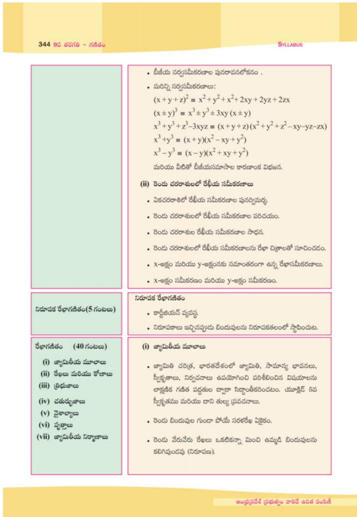
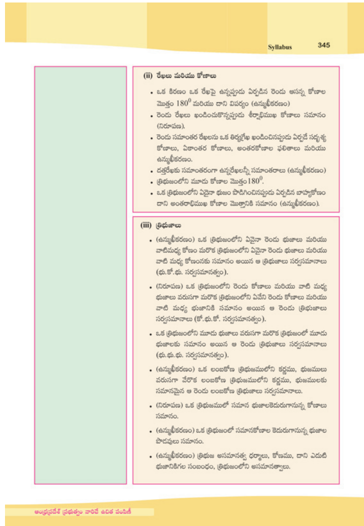
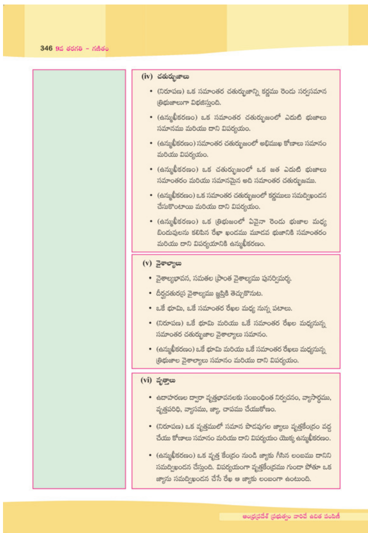
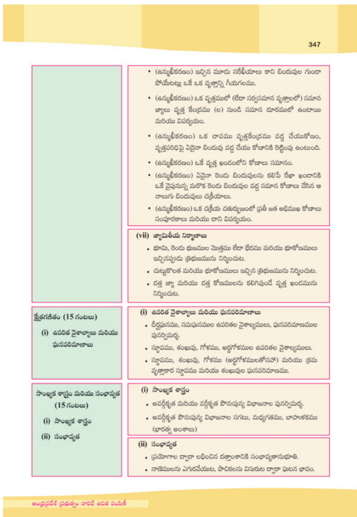
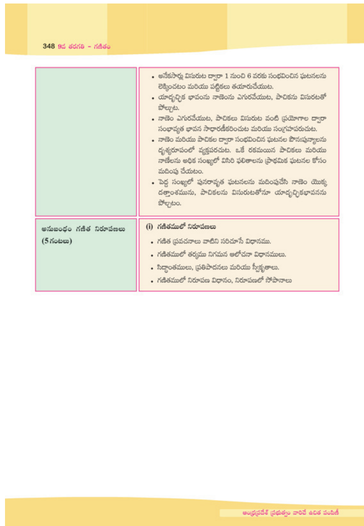








## 9వ తరగతి

# f) విద్యాప్రమాణాలు

## 8వ, 9వ తరగతి

357

### విద్యాప్రమాణాలు

విద్యార్థులు ఒక తరగతిలో ఏమి చేయగలగాలి, ఏం తెలిసి యుండాలో స్పష్టంగా వివరించే ప్రవచనాలను ఆ తరగతి యొక్క 'విద్యాప్రమాణాలు' అంటాము. ఈ విద్యా ప్రమాణాలను కింది విభాగాలుగా వర్గీకరించడమైనది.

గణితంలోని వివిధ పాఠ్యాంశాలు (Content) ద్వారా కింద సూచించిన విద్యాప్రమాణాలు సాధించాలి.

**1. సమస్యా సాధన**

గణిత భావనలు, పద్ధతులను ఉపయోగించడం ద్వారా గణిత సమస్యలను సాధించడం.

**(అ) సమస్యలలో రకాలు**

పజిల్స్, పదసమస్యలు, పటసమస్యలు, దత్తాంశ అవగాహన - విశ్లేషణ - పట్టికలు- గ్రాఫ్, పద్ధతి ప్రకారం చేయు సమస్యలు మొదలగు రకరకాలుగా గణిత సమస్యలుంటాయి.

**సమస్యా సాధన - సోపానాలు**

- సమస్యలను చదవడం.
- దత్తాంశంలోని సమాచారం మొత్తాన్ని విడిభాగాలుగా గుర్తించడం.
- అనుబంధ విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్య విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్యలో ఇమిడియున్న గణిత భావనలను అవగాహన చేసుకోవడం.
- లెక్కచేయు పద్ధతి విధానాన్ని ఎంపిక చేయడం.
- ఎంపిక చేసిన పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం

**(ఆ) సంక్లిష్టత**

సమస్య యొక్క సంక్లిష్టత అనునది కింది అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

- అనుసంధానం చేయడం (ఇది అనుసంధానం విభాగంలో నిర్వచించనైనది)
- సమస్యలో ఉన్న సోపానాల సంఖ్య.
- సమస్యలోఉన్న ప్రక్రియల సంఖ్య.
- సమస్యా సాధనకు ఇవ్వబడిన సందర్భ సమాచారం ఏ మేరకు ఉన్నది ?
- సమస్య సాధించే పద్ధతి యొక్క సహజత్వం

**2. కారణాలు చెప్పడం - నిరూపణ చేయడం**

- దశల వారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించడం.
- గణిత సాధారణీకరణలను మరియు ప్రకల్పినలను అర్థం చేసుకోవడం మరియు చేయగలగడం.

ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

358 Mathematics VIII

- పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడం మరియు సరిచూడడం.
- తార్కిక చర్చలను పరీక్షించడం.
- సమస్యా నిరూపణలోని క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడం.
- ఆగమన, నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడం.
- గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించడం

**3. వ్యక్తపరచడం**

- గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవగలగడం - రాయగలగడం.
  ఉదా: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, త్రిభుజములోని మూడుకోణముల మొత్తం $= 180^0$
- గణిత వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడం.
- గణితపరమైన ఆలోచనలను తన స్వంత మాటల్లో వివరించడం. ఉదా: చతురస్రం అనునది నాలుగు సమాన భుజాలు మరియు నాలుగు సమాన కోణాలు గల సంవృత పటం.
- పద్ధతిని వివరించడం. ఉదా: రెండంకెల సంఖ్యలను కూడడంలో మొదటి ఒకట్లస్థానం అంకెలను కూడి తరువాత పదుల స్థానంలోని అంకెలను కూడడం / స్థానమార్పిడిని గుర్తుకు తెచ్చుకుంటూ
- గణిత తార్కికతను వివరించడం.

**4. అనుసంధానం**

- అనుబంధ గణజత పాఠ్యవిభాగాలను - భావనలను అనుసంధానం చేయడం. ఉదా: గుణకారానికి, కూడికకు; మొత్తంలో భాగానికి - నిష&పత్తికి - భాగహారానికి; అమరికలకు - సౌష్ఠవమునకు; కొలతలు మరియు తలము/అంతరాళం
- దైనందిన జీవితానికి గణితానికి అనుసంధానం చేయడం.
- వేర్వేరు సబ్జక్టులతో గణితాన్ని అనుసంధానం చేయడం.
- గణితంలోనే వేర్వేరు పాఠ్యాంశాలకు సంబంధించిన భావాలను అనుసంధానం చేయడం, ఉదా: దత్తాంశ సేకరణ మరియు అంకగణితం; అంకగణితం మరియు ప్రదేశం.
- భావనలను, బహుళ పద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం.

**5. దృశ్యీకరణ మరియు ప్రాతినిధ్య పరచడం**

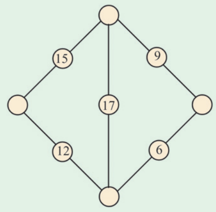
- పట్టికలోని సమాచారం, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మ చిత్రం, 2D-పటాలు, 3D-పటాలు మరియు పటాలను చదవడం.
- పట్టికలను రూపొందించడం, సంఖ్యారేఖపై చూపడం, పటచిత్రములు, దిమ్మ చిత్రములు, పటాలను గీయడం.

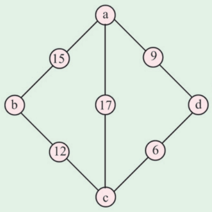
## g) పజిల్స్

### 8వ తరగతి

**మ్యాజిక్ డైమండ్**

డైమండ్‌లోని ప్రతి వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం సమానమయ్యేలా, గడులను సరయిన సంఖ్యలతో పూరించండి.




సూచన : ఆ సంఖ్యలు $a = x$, $b = 5 + x$, $c = 3 + x$, $d = 11 + x$ రూపంలో ఉంటాయి.

ఏదైనా ఒక సంఖ్య 'x' ప్రతివరుసలోని సంఖ్యల మొత్తం $20 + 2x$ అగును.

ఉదాహరణకు $x = 1$ అయిన, $a = 1, b = 6, c = 4, d = 12$ అవుతుంది మరియు ప్రతి వరుసలోని అంకెల మొత్తం 22 అగును.

## h) మీకు తెలుసా?

### 9వ తరగతి

**మీకు తెలుసా?**

**8 × 8 మ్యాజిక్ చదరాన్ని తయారు చేయగలరా?**

1 నుండి 64 వరకు సంఖ్యలను పటం (i) లో చూపిన విధంగా చదరపుగదులలో వేయండి. కర్ణాలను కలుపుతూ గీతలు గీయండి. మ్యాజిక్ చదరపు ఏర్పడడానికి ఈ కర్ణాలపైగల సంఖ్యలను వాటి పూరకాలతో పటం (ii) లో చూపిన విధంగా తారుమారు చేయండి. (కనిష్ట, గరిష్ట సంఖ్యల జతల మొత్తాలు సమానమైనవాటిని మ్యాజిక్ చదరములో పూరకాలు అంటారు). ఇలా మీరు మరిన్ని మ్యాజిక్ చదరాలను రూపొందించగలరా?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 48 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 2 | 3 | 61 | 60 | 6 | 7 | 57 |
| 9 | 55 | 54 | 12 | 13 | 51 | 50 | 16 |
| 17 | 47 | 46 | 20 | 21 | 43 | 42 | 24 |
| 40 | 26 | 27 | 37 | 36 | 30 | 31 | 33 |
| 32 | 34 | 35 | 29 | 28 | 38 | 39 | 25 |
| 41 | 23 | 22 | 44 | 45 | 19 | 18 | 48 |
| 49 | 15 | 14 | 52 | 53 | 11 | 10 | 56 |
| 8 | 58 | 59 | 5 | 4 | 62 | 63 | 1 |

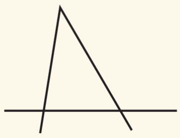
మ్యాజిక్ చదరము (Magic Square) అంటే చదరాలలో చూపే సంఖ్యల ప్రత్యేక అమరిక, దీనిలో అడ్డువరుసలు, నిలువు వరుసలు, కర్ణాలలో గల సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ సమానం)

## i) మెదడుకు మేత

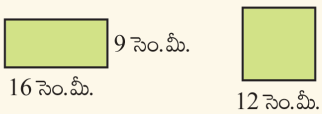
### 9వ తరగతి

**మెదడుకు మేత**

1. త్రిభుజ పదకేళిని తయారుచేయండి. కింది పటానికి మరి రెండు రేఖలను జత చేస్తే 10 త్రిభుజాలు ఏర్పడాలి. పటం ఏర్పరచి త్రిభుజాలు లెక్కించండి.

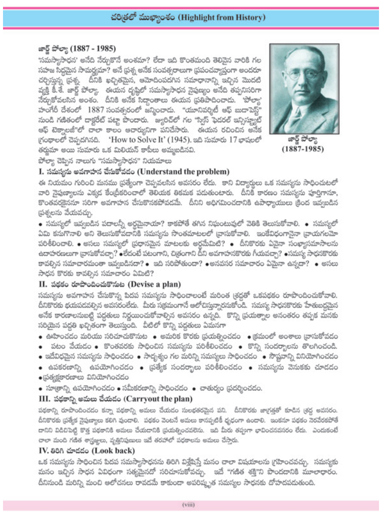


2. 16 సెం.మీ. పొడవు, 9 సెం.మీ. వెడల్పు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితాన్ని తీసుకోండి. దానిని ఖచ్చితంగా రెండు భాగాలు (రెండే రెండు!) చేసి కలిపి, – చతురస్రంగా మార్చండి.



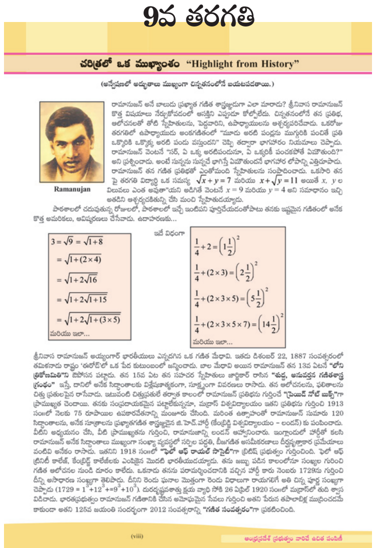

## j) చరిత్రలో ఒక ముఖ్యాంశం

### 8వ తరగతి



చరిత్రలో ముఖ్యాంశం (Highlight from History)

### 9వ తరగతి

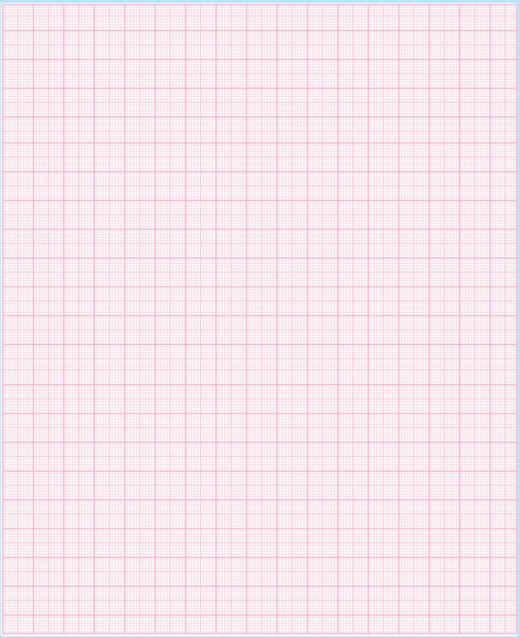


చరిత్రలో ఒక ముఖ్యాంశం "Highlight from History"

# k) అద్భుతవృత్తం

## 9వ తరగతి

గ్రాఫ్ కాగితం



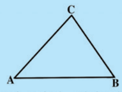
### అద్భుత వృత్తం

**త్రిభుజముపై తొమ్మిది బిందువుల వృత్తం నిర్మించుట**

ఒక త్రిభుజం యొక్క శీర్షాల నుండి ఎదుటి భుజం పై గీసిన లంబాలు తాకే బిందువులు, త్రిభుజ భుజాల మధ్యబిందువుల మరియు లంబకేంద్రానికి, శీర్షాలకు గల మధ్యబిందువులు అన్నింటినీ తాకుతూ గీయగలిగే వృత్తమే అద్భుత వృత్తం. దీనినే తొమ్మిది బిందువుల వృత్తం (nine point circle) అంటారు. దీనిని మొట్టమొదట 1765 సం॥లో లెనార్ ఆయిలర్ కనుగొన్నాడు. దీనిని మెరుగు పరిచి సిద్ధాంత పరంగా 1882 సం॥లో గణిత శాస్త్రవేత్త కార్ల్ ఫ్యూయర్‌బాచ్ నిరూపించాడు.

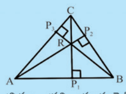
ఈ తొమ్మిది బిందువుల వృత్తాన్ని నిర్మించడం జ్యామితీయ పటాల నిర్మాణ కౌశలానిక ఒక పరీక్ష. దీనిని మీరు స్వయంగా నిర్మించడానికి కింది సోపానాలు దోహదపడతాయి. ప్రయత్నించి చూడండి.

సోపానం 1



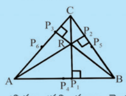

ఒక పెద్దదైన విషయబాహు త్రిభుజంను ఛార్టుపై (చక్కని వృత్తం కొరకు) గీయండి. దానికి $\Delta ABC$ అని పేరు పెట్టండి.

సోపానం 2



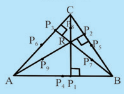

త్రిభుజ ప్రతి భుజముపైకి ఎదుటి శీర్షాల నుండి లంబాలు గీచి, ఆ బిందువులకు $P_1$, $P_2$ మరియు $P_3$ అని గుర్తించండి. లంబకేంద్రాన్ని R అని గుర్తించండి.

సోపానం 3



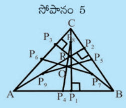

త్రిభుజ ప్రతి భుజం యొక్క మధ్యబిందులను గుర్తించి వరుసగా $P_4$, $P_5$ మరియు $P_6$ లుగా గుర్తించండి. అంటే AB మధ్యబిందువు $P_4$, BC మధ్యబిందువు $P_5$ ఇలా.....

సోపానం 4



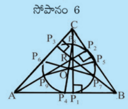

BR, CR మరియు AR ల యొక్క మధ్య బిందువులను గుర్తించి వాటికి $P_7$, $P_8$ మరియు $P_9$ అని గుర్తించండి. అంటే BR మధ్యబిందువు $P_7$, CR మధ్యబిందువు $P_8$ ఇలా.....

సోపానం 5




$P_4$ నుండి $P_8$, $P_5$ నుండి $P_9$ మరియు $P_6$ నుండి $P_7$ కలుపుతూ రేఖాఖండాలు గీయండి. అవి కలుసుకొన్న బిందువును 'O'గా గుర్తించండి.

సోపానం 6




'O' కేంద్రంగా $OP_1$ వ్యాసార్థంతో వృత్తాన్ని గీయండి. ఈ వృత్తం $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$, $P_6$, $P_7$, $P_8$ మరియు $P_9$ బిందువుల గుండా పోతుంది.

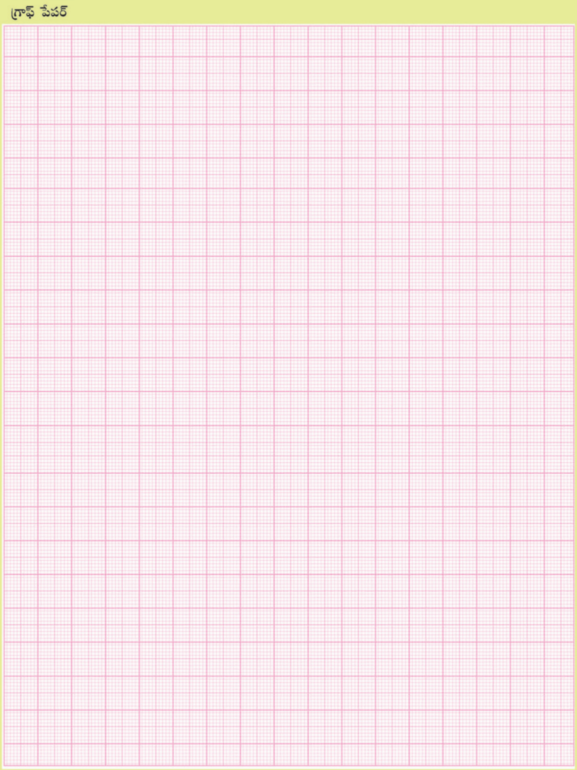
ఇదే మీరు గీచిన అద్భుత వృత్తం!

ఈ జ్యామితి పట నిర్మాణంలో "వృత్తలేఖిని" ప్రాధాన్యతను మీరు గుర్తించే ఉంటారు.

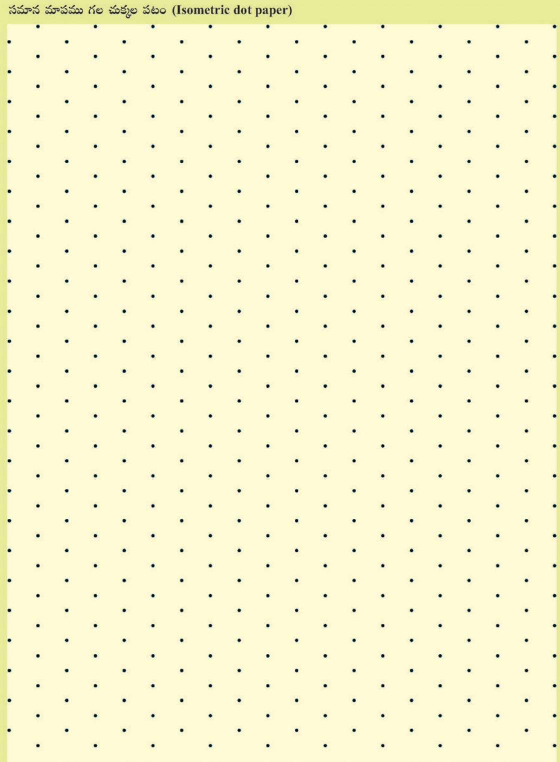
# l) గ్రాఫ్ / చుక్కల కాగితం

## 8వ తరగతి

గ్రాఫ్ పేపర్



సమాన మాపము గల చుక్కల పటం (Isometric dot paper)



**8,9 తరగతుల గణిత పాఠ్యపుస్తకాలలో ఇవ్వబడిన ప్రత్యేకాంశాలు విద్యార్థులకు/ ఉపాధ్యాయులకు ఏవిధంగా తోడ్పడతాయో చర్చించండి.**

### ♦ 8వ తరగతి గణితం – పరిశీలన

ప్రస్తుతం అమలులోవున్న పాఠ్యపుస్తకం 311 పేజీలు వుంటే నూతన పాఠ్యపుస్తకంలో 352 పేజీలు వున్నాయి. అధ్యాయాల అమరికలో రంగుల వర్ణచిత్రాలు, విశ్లేషణాత్మక పట్టికలు, దత్తాంశాలను వివరించే గ్రాఫ్‌లు విస్తారంగా పొందుపర్చడం వలన ఈ పరిమాణం కాస్త పెరిగింది. అధ్యాయాల సంఖ్య 15గానే వున్నాయి. ఏ అధ్యాయం విద్యార్థులకు భారం కాకుండా జాగ్రత్తలు తీసుకోబడింది. అధ్యాయాలను హేతుబద్ధంగానూ, శీర్షికా పద్ధతిననుసరించి ముందు తరగతి అంశాలతోనూ, తర్వాత తరగతి అంశాలతో జతపడేవిధంగానూ సర్పిల విధానంలో చేకూర్చి వ్రాయబడ్డాయి. ఏదశలోనూ విద్యార్థులు గణితం పట్ల, సమస్యాసాధన పట్ల విసుగు చెందని విధంగా వివిధ రంగాలకు చెందిన అధ్యాయాలను ప్రతిదశలో ప్రవేశపెట్టబడ్డాయి. ప్రస్తుత పాఠ్యపుస్తకంలో "సమితులు – సంబంధాలు", రేఖీయసమీకరణాలు, అసమీకరణాలు, అధ్యాయాలతోబాటు "వ్యాపారగణితం" లో కొంత భాగం పూర్తిగా తొలగించబడ్డాయి. వీటిని పై తరగతులలో విద్యార్థులు వివరణాత్మకంగా తెలుసుకుంటారు. "వాస్తవ సంఖ్యల" అధ్యాయంలో అకరణీయ సంఖ్యల గురించి వివరణాత్మకంగానూ, ధర్మాలను సోదోహరణంగా వివరించారు. రేఖాగణితం యొక్క అధ్యాయాలు చతుర్భుజాల నిర్మాణాలకు, పటాల అన్వేషణకొరకు, ద్విమితీయ, త్రిమితీయ చిత్రాల అవగాహన కొరకు పరిమితం చేసారు. నిరూపణలు, కారణాలతో కూడిన రేఖా గణిత సంబంధాలను తర్వాత తరగతికి మార్చారు. వ్యాపార గణితంలో నిష్పత్తి, అనుపాతంతోబాటు అమ్మకపుపన్ను, వాట్ మొదలగు అంశాలు కొత్తగా చేర్చబడ్డాయి. సంఖ్యలకు సంబంధించిన భావనలలో భాజనీయతా సూత్రాలకు సకారణాత్మక విశ్లేషణలు పొందుపర్చి, నూతన సూత్రాల ఆవిష్కరణకు దారి తీసేవిధంగా "సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం" అధ్యాయం రూపొందించబడింది. బీజ గణితానికి సంబంధించిన రేఖీయ సమీకరణాల సాధన, ఘాతాంకాలు, బీజీయసమాసాలు, అధ్యాయాలలో మరింత లోతైన చర్చ, విశ్లేషణలు, తరగతిగది కృత్యాలు చేర్చబడ్డాయి. ప్రత్యేకలబ్ధాలను, కారణాంక విభజనలను తర్వాత తరగతికి మార్చబడ్డాయి. ప్రతీ అధ్యాయంలో సమస్యలసాధన నైపుణ్యాలను పెంపొందించే విధంగా అనేక ఉదాహరణలు ఇచ్చి, అభ్యాసాల సంఖ్య తగ్గించి గణిత అధ్యయనంలో పిల్లలు ఏదశలోనూ ఒత్తిడికి లోను కాకుండా చేయబడ్డాయి. అధ్యాయంలో భావనలు అవగాహన తెల్సుకొనుటకు, తదుపరి భావనకు జోడించే విధంగా 'ఇవిచేయండి', 'ప్రయత్నించండి' వంటి శీర్షికల ద్వారా బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలలోనే సామర్థ్యాలను అంచనా వేసే విధంగా ప్రశ్నలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ శీర్షికల ప్రశ్నలు విద్యార్థులు వ్యక్తిగతంగానూ, జట్టు కృత్యాలలో చేయడానికి ఉద్దేశించబడినవని గమనించాలి.

### ♦ 9వ తరగతి గణితం – పరిశీలన

నూతన గణిత పాఠ్యపుస్తకం (9వ తరగతి)లో ప్రస్తుత పాఠ్యపుస్తకంతో పోలిస్తే సమూల మార్పులు చోటు చేసుకున్నాయి. నిర్దేశించిన నూతన సిలబస్‌కు అనుగుణంగా విద్యార్థి యొక్క మానసిక, శారీరక స్థాయిలను అనుసరించి రేఖాగణితానికి అత్యధిక ప్రాధాన్యత కల్పించబడింది. జ్యామితిని హేతుబద్ధంగా అవగాహన కల్పించే విధంగా యూక్లిడ్ జ్యామితి మూలాలనుండి, రేఖాలు–కోణాలు, త్రిభుజాలు చతుర్భుజాలు, వైశాల్యాలు, వృత్తాలు, రేఖాగణిత నిర్మాణాల వరకు ఇవ్వబడింది. ఈ అధ్యాయాలు అన్నియూ ప్రస్తుతం 8,9 తరగతులలో నేర్చుకుంటున్నవే. అయితే

వీటిని తార్కికక్రమంలో అమర్చడంతోబాటు, సిద్ధాంతాలను కృత్యాధార పద్ధతిలో అవగాహన పర్చుకొని తద్వారా నిరూపణలు చేసే విధంగా వ్రాయబడ్డాయి. ప్రతీ సిద్ధాంతం, సమస్య విద్యార్థులు హేతుబద్ధంగా ఆలోచించడం, చర్చించడం, కారణాలు విశ్లేషించడం, ఫలితాన్ని రాబట్టడం విధంగా సాగుతుంది. సమస్యల సాధనలో విద్యార్థులకు తోడ్పడే విధంగా చాలావరకు ఉదాహరణలు ఇచ్చి సాధించడమైంది.

ప్రస్తుతపుస్తకంలో 439పేజీలుంటే నూతన పుస్తకంలో గణనీయంగా 342 పేజీలకు తగ్గించినప్పటికీ, అంశాలు మరింత మెరుగైనరీతిలో వ్రాయబడ్డాయి. సిలబస్‌లో తొలగించిన పాఠ్యాంశాలు సంవర్గమానాలు, బీజీయసమాసాల వర్గమూలాలు, చక్రీయసమాసాలు- వర్గ సమీకరణాలు, సమితులు, సంబంధాలు, రేఖీయ సమీకరణాలు-అసమీకరణాలు, మాత్రికలు, గణన అధ్యాయాలకు చోటు కల్పించలేదు. అయితే కొత్తగా, శేషసిద్ధాంతం, కారణాంక సిద్ధాంతం, నిరూపకజ్యామితి, సాంఖ్యశాస్త్రంలో కొత్తఅంశాలు, సంభావ్యతలతోబాటు గణిత నిరూపణలకు సరికొత్త రీతిలో అవగాహన పర్చబడింది. ప్రస్తుత పుస్తకంలో వందలకొద్దీవున్న సమస్యలను, పదులలో నున్న అభ్యాసాలను తగ్గించి విద్యార్థుల ఆలోచనలకు పదును పెట్టే సమస్యలను చేర్చడానికి ప్రయత్నించడం జరిగింది.

నూతన పాఠ్యపుస్తకాలు పరిమాణంలోనూ, ఆకారంలోనూ, రంగులలోనూ, ఆకర్షణీయంగా కనిపించడమే కాకుండా గణితశాస్త్ర స్వభావం, చరిత్ర, పిల్లలు సమస్యాసాధనకు అనుసరించాల్సిన విధానాలను తెలిపే అంశాలు అదనంగా చేర్చబడ్డాయి. ఉదా: శ్రీనివాసరామానుజన్, జార్జిపోల్యా, తొమ్మిది బిందువుల వృత్తం, ఇదే విధంగా విద్యార్థులు గణిత అభ్యసనంపట్ల అభిరుచి, ఆసక్తి పెంపొందించుకొనే విధంగా కొన్ని ప్రహేళికలు, మీకు తెలుసా? వంటి అంశాలు చేర్చబడ్డాయి.

**ముగింపు :**

నూతన విద్యావిధానంలో భాగంగా 8,9,10 తరగతులలో అంశాలన్నియూ ఒకదానికొకటి సంబంధం కలిగివుండి, ఉన్నతస్థాయి గణిత అధ్యయనానికి పునాది వేస్తాయనుటలో సందేహంలేదు.

గణిత ఉపాధ్యాయులు తమ చురుకైన ఆలోచనావిధానాలతో బోధనావిధానాన్ని ప్రణాళికా బద్ధంగా రూపొందించుకొని, పాఠ్యపుస్తకంలో అంశాలతోపాటు, మరిన్ని నూతన అంశాలను ఎప్పటికప్పుడు జోడించుకొని విద్యార్థులకు అందించవలసి ఉన్నది. విద్యార్థులు ఉన్నతస్థాయి గణితాన్ని నేర్చుకొనుటలోనూ, గణితీకరణందిశగా కొనసాగుటలోనూ ప్రయత్నిస్తారని ఆశిద్దాం.

పిల్లలు తార్కికంగా ఆలోచించడానికి, చింతన చేయడానికి, విశ్లేషించడానికి మరియు వ్యక్తీకరించడానికి ఒక వాహనంగా గణితాన్ని చూడాలనేది ప్రత్యేకమైన విషయమే అయిన గణితాన్ని విశ్లేషణ, చింతన అవసరమున్న ఏ ఇతర విషయంలోనైనా సంబంధమున్నదానిగా చూడాలని, జాతీయ విద్యావిధానం 1986 చెప్పింది. జాతీయ విద్యాప్రణాళిక చట్రం NCF-2005 ఈ విషయాన్నే నినదించిన గణిత బోధన ఇంకా సంకుచిత లక్ష్యాల సాధన దిశగానే పోతూండటం విచారకరం.

– SCF 2011

## అధ్యాయం - 3

# పాఠ్యపుస్తకంలో ఒక అధ్యాయం - సమగ్ర విశ్లేషణ

## Unit Plan

**అంకగణితం** **8వ తరగతి**

**యూనిట్ : అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట.** **16 పీరియడ్లు (12 గంటలు)**

**(5వ అధ్యాయం)**

| క్ర.సం | ఉపశీర్షిక | భావనలు | పీరియడ్స్ | సామగ్రి |
|---|---|---|---|---|
| 1. | నిష్పత్తి (2) | i) నిష్పత్తి భావన | 1 | చార్టులు |
| | | ii)గోల్డెన్ నిష్పత్తి | 2 | వార్తాపత్రికలు |
| | | iii) బహుళ నిష్పత్తి | | గోల్డెన్ నిష్పత్తికి సంబంధించిన |
| | | iv)బహుళ నిష్పత్తి పై కొన్ని సమస్యలు | 1 | కట్టడంల చిత్రాలు |
| 2. | శాతం (3) | i) రాశులను శాతంతో పోల్చుట. | 1 | చార్టులు |
| | | ii)శాతంలో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల కనుగొనుట | 3 | |
| | | iii) నిష్పత్తులు, శాతంలకు సంబంధించిన పద సమస్యలు | 1 | |
| | | iv) శాతంలు అంచనా వేయడం | 1 | |
| 3. | రుసుము (2) | i) రుసుము భావన | 1,2 | చార్టులు |
| | | ii)రుసుము పై పద సమస్యలు | 1 | |
| 4. | లాభనష్టములు(4) | i) లాభ,నష్టముల భావన | 1 | చార్టులు |
| | | ii)లాభ, నష్టముల తేడా కనుగొనుట | 4 | |
| | | iii) లాభశాతం లేదా నష్టశాతంలను గణించుట | 1 | |
| | | iv) లాభ, నష్టములకు సంబంధించిన పద సమస్యలు | | |

| క్ర.సం | ఉపశీర్షిక | భావనలు | పీరియడ్స్ | సామగ్రి |
|---|---|---|---|---|
| 5. | అమ్మకపు పన్ను (VAT)(1) | i) VATకు సంబంధించిన భావన | 1 | చార్టులు మోడల్ బిల్లులు |
| | | ii) పద సమస్యలు | 4 | |
| 6. | చక్రవడ్డీ (4) | i) చక్రవడ్డీ భావన | 1 | చార్టులు |
| | | ii) చక్రవడ్డీ సూత్రీకరణ | | |
| | | iii) సంవత్సరంనకు లేదా అర్ధసం॥నకు చక్రవడ్డీ లెక్క కట్టుట. | 3 | వివిధ బ్యాంకులకు చెందిన కరపత్రాలు, అంతర్జాలంనుండి సేకరించిన వివరాలు, |
| | | iv) చక్రవడ్డీ పదసమస్యలు, అనువర్తితాలు | | |

**అంశము : అంకగణితం**

**అధ్యాయం : అనుపాతంతో రాశులను పోల్చుట**

**తరగతి : 8వ తరగతి**

**1. సాధించవలసిన విద్యాప్రమాణాలు :-**

**1) సమస్యాసాధన :-**

- బహుళనిష్పత్తికి సంబంధించిన సమస్యలు సాధించును
- పద సమస్యలను సాధించును.

**2) కారణాలు చెప్పడం :-**

- నిష్పత్తులకు, శాతంలకు మధ్య తేడాను వివరించును.
- శాతంను అంచనా వేయగలడు.
- లాభ,నష్టంల మధ్య తేడాను వివరించును.
- చక్రవడ్డీకి సూత్రీకరణ చేస్తాడు.

**3) వ్యక్తపరచడం :-**

- బహుళనిష్పత్తికి సంబంధించిన ఆలోచనలను స్వంతమాటలలో వివరించగలడు.
- శాతంలు, లాభనష్టంలు, చక్రవడ్డీకి సంబంధించిన సమస్యలను వివిధ పద్ధతులలో చేయగలడు.
- చక్రవడ్డీ సూత్రీకరణలో తార్కికతను వివరించగలుగుతాడు.

**4) అనుసంధానము :-**

- నిష్పత్తిని భాగహారమునకు, శాతంనకు అనుసంధానము చేయగలడు
- లాభ,నష్టంలు, రుసుము, VATలను శాతంలతో అనుసంధానము చేయగలడు.

- చక్రవడ్డీ, VATను దైనందిన జీవితానికి అనుసంధానము చేయగలదు
- లాభ,నష్టంలు చక్రవడ్డీ సమస్యలను బీజగణితంతో అనుసంధానం చేయగలదు.

5) ప్రాతినిధ్యపరచడం:-

- బహుళ నిష్పత్తిని పట్టికరూపంలో ఉదాహరణలను వివరించగలదు.
- శాతంలను పట్టిక రూపంలో రాయగలదు.
- రుసుము, VATలకు సంబంధించిన బిల్లులను సేకరించి పట్టిక రూపంలో రాయగలదు
- అధ్యాయంలో వివిధపట్టికలను పూర్తిచేసి, వాటిలోని సమాచారంను చదువగలదు.

**2. బోధనాభ్యస సామాగ్రి :-** పాఠ్యపుస్తకం, గ్రాఫ్‌షీట్లు, చార్టులు, స్కెచ్‌లు, వార్తాపత్రికలు, దుకాణదారుని నుండి పొందిన బిల్లులు, వివిధ బ్యాంకులనుండి సేకరించిన కరపత్రంలు, ప్రముఖ కట్టడంల చిత్రంలు.

**3. పరిచయం :-** తరగతి గదిలో గల విద్యార్థులను A మరియు B గ్రూపులుగా విభజించి ఒక సన్నివేశంను ఏర్పాటు చేయవలెను. A మరియు B లలోని విద్యార్థులను పోల్చుట ద్వారా ఏర్పడిన అనుభవం ద్వారా నిష్పత్తిని పునశ్చరణ చేయడం జరగాలి.

**4. బోధనావ్యూహాలు :-**

- నిత్యజీవితంలో ఒక వ్యాపారంలో ఇద్దరు వ్యక్తులు పెట్టిన పెట్టుబడులు, కాలంనకు సంబంధించిన కృత్యం ద్వారా బహుళనిష్పత్తి అనే భావన పరిచయం జరగాలి.
- విద్యార్థి a : b మరియు c: d నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తిని కనుగొని, సొంత ఉదహరణలు ఇవ్వాలి.
- తరగతిగదిలో సందర్భంలను ఏర్పాటుచేసి శాతంలో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను కనుగొనుటకు ఆలోచన రూపొందించాలి.
- విద్యార్థులు బహుళనిష్పత్తికి, శాతంలకు సంబంధించిన పదసమస్యలు చేయుటకు కొన్ని సమస్యలను తరగతిగదిలో విద్యార్థులందరు పాల్గొనేవిధంగా, అర్థమయ్యే సన్నివేశం ఏర్పాటుచేయబడాలి.
- చార్టులు ఉపయోగించి రుసుము భావన విద్యార్థులలో ఏర్పాటుచేయడం జరుగాలి. రుసుముకు సంబంధించిన పదసమస్యలు చర్చించడం జరగాలి.
- చార్టులు ఉపయోగించి లాభ,నష్టంలు అనే భావన ఏర్పాటు చేయడం జరగాలి.
- వివిధ రకాల బిల్లులు పరిశీలించడం ద్వారా విద్యార్థులకు లాభ, నష్టంల మధ్య తేడాను వివరించడం జరుపుతారు.
- లాభ, నష్టంల మధ్య సమస్యలు సాధించుటకు పాఠ్యపుస్తకంలోని కొన్ని సమస్యలను చర్చించడము జరగాలి.
- నిత్యజీవితంలో దుకాణదారుడు వేసే అమ్మకపుపన్ను గురించి వారి బిల్లుల ద్వారా VAT భావనను ఏర్పాటుచేయాలి.
- వివిధ బ్యాంకులు నుండి సేకరించిన కరపత్రంల ఆధారంగా చక్రవడ్డీ భావన ఏర్పాటు చేయడం జరపాలి.

- విద్యార్థులకు కృత్యంలు ఏర్పాటుచేసి చక్రవడ్డీకి సూత్రీకరణ చేయించాలి.
- చక్రవడ్డీపై సమస్యలు వాటిపై పదసమస్యలు, అనువర్తనంలు వివరించాలి.

**బోధనావ్యూహాలు అమలుపరుచుట :**

**నిష్పత్తి :**

- పాఠ్యపుస్తకంలోని పేజి నెం.97, 98లలోని పటంలను చార్టులలో పెట్టబడులు, కాలంలకు సంబంధించిన పట్టికలు వ్రాసి, వాటి మధ్యగల సంబంధంను పిల్లల పూర్తితరగతిలో చర్చింపచేస్తు అన్వయపరచడం చేయవలెను.
- విద్యార్థులలో బహుళనిష్పత్తి భావనపై అవగాహన కలుగును.
- విద్యార్థులను గ్రూపులుగా విభజించి పేజి.నెం 99లోని "వీటిని ప్రయత్నించండి" చర్చద్వారా ఆలోచింప చేయవలెను.
- గోల్డెన్ నిష్పత్తికి సంబంధించిన ప్రముఖ కట్టడంల చిత్రాలు పరిశీలింపజేయాలి.
- విద్యార్థులకు గోల్డెన్‌నిష్పత్తికి సంబంధించిన భావన అవగాహన చేసుకొని, ఆనందము పొందడానికి అవకాశము కల్పించవలెను.
- అభ్యాసం 5.1లోని 1, 2, 3, 4 సమస్యలను విద్యార్థులతో స్వంతంగా చేయించవలెను.

**శాతం :**

- పాఠ్యపుస్తకములోని పేజినెం. 99లోని మాదిరి ఉదహరణకు తీసుకొని పిల్లలతో పూర్తితరగతిలో నిష్పత్తిని శాతంతో పోల్చవచ్చును అనే భావన ఏర్పాటుచేయవలెను.
- పేజి నెం.101 లోని "ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి" పిల్లలతో పూర్తి తరగతిలో స్వంతంగా చేయించి నూతన పద్ధతులు కనుగొనుటకు అవకాశం కల్పించవలెను.
- అభ్యాసం 5.1లోని 7, 11 సమస్యలను విద్యార్థులతో స్వంతంగా చేయించవలెను.

**రుసుము :**

- పాఠ్యపుస్తకంలోని పేజి నెం. 102లోని మాదిరిగా పెద్ద, పెద్ద దుకాణంలోని ధరల సూచలను చార్టులపై ప్రదర్శించి పిల్లలందరితో చర్చించవలెను. రుసుము అనగా 'తగ్గింపు' అను భావన కల్పించవలెను.
- పై కృత్యం వలన పిల్లలలో రుసుము అనే భావనపై అవగాహన కల్పించవలెను.
- పేజి నెం. 104లో "ప్రయత్నించండి" గ్రూప్‌లుగా విభజించి చర్చద్వారా రుసుమును నిత్యజీవితంలోని ఉపయోగులు, స్వంత ఉదహరణలు ఇచ్చేవిధంగా అవగాహన కల్పించవలెను.
- పేజి నెం. 105లో "ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి" పిల్లలతో పూర్తి తరగతిలో స్వంతంగా చేయించవలెను.
- పేజి నెం. 105లో "వీటిని ప్రయత్నించండి" పిల్లలను గ్రూప్‌లుగా విభజించి చర్చ ద్వారా నిత్యజీవితంలో ఎదురయ్యే సమస్యలలో శాతంలను అంచనా వేయగలరు.

**లాభనష్టములు :**

- పేజి నెం. 105లోని కొన్ని సందర్భములను చార్టుపై వ్రాసి విద్యార్థులందరితో పరిశీలింప చేయవలెను.
- పరిశీలన ద్వారా "లాభము, నష్టము" అనే భావము కల్పించవలెను.
- పేజి నెం. 106లో "ఆలోచించి, చర్చించిరాయండి" పిల్లలతో చేయించవలెను.
- పేజి నెం. 107లో ఉదహరణ 7ను నల్లబల్లపై విద్యార్థుల సహకారంతో చర్చ ద్వారా సాధింపచేయవలెను.
- అభ్యాసం 5.2లోని 8, 9, 10, 11, 12 సమస్యలను విద్యార్థులతో స్వంతంగా చేయించవలెను.

**రుసుము మరియు VAT :**

- వివిధ దుకాణాల నుండి సేకరించిన బిల్లులు అందరు విద్యార్థులకు ఇచ్చి పరిశీలింప చేయవలెను.
- పరిశీలన ద్వారా రుసుము మరియు VAT భావనలు కల్పించవలెను.
- పేజి నెం. 109లో ఉదా॥ని నల్లబల్లపై విద్యార్థుల సహకారముతో చర్చ ద్వారా సాధింపచేయవలెను.
- అభ్యాసం 5.2లోని 5, 6, 13, 14 సమస్యలను విద్యార్థులచే స్వంతంగా చేయించవలెను.

**చక్రవడ్డీ :**

- వివిధ బ్యాంకులు ప్రచురించే డిపాజిట్లు, వడ్డీరేట్లు, లోనులకు సంబంధించిన కర పత్రాలు సేకరించి విద్యార్థులందరితో పరిశీలింప చేయవలెను.
- ఇట్టి పరిశీలనద్వారా "చక్రవడ్డీ" అనే భావన, పూర్తితరగతిలో చర్చించి కల్పించవలెను.
- చార్టు ద్వారా పేజి 113 మాదిరిగా చక్రవడ్డీ కనుగొనే పద్ధతి, అదే పద్ధతిని సాధారణీకరించి విద్యార్థులందరితో చక్రవడ్డీ కనుగొనుటకు సూత్రీకరణ చేయవలెను.
- పేజి నెం. 114లో ఉదా॥ని నల్లబల్లపై విద్యార్థులతో చర్చించి సాధింపచేసి, "ఇవి చేయండి" విద్యార్థులందరు స్వతహాగా చేయించవలెను.
- పేజి నెం. 115లోని, ఉదహరణ 11 నల్లబల్లపై సాధింపచేసి, "ఇవిచేయండి" అనే కృత్యాలను విద్యార్థులతో చేయించవలెను.
- పేజి నెం. 118లోని, ఉదహరణ 15ను ఉపయోగించి చక్రవడ్డీసూత్రం భౌతికశాస్త్రంతో అనువర్తనం కల్గియుంటుందని విద్యార్థులలో అవగాహనా కల్పించవలెను.
- అభ్యాసం 5.3లోని 1, 3, 6, 8, 10, 14, 15 సమస్యలను నల్లబల్లపై విద్యార్థులతో చర్చించి సాధింపచేయవలెను.

**అదనపు సమాచారం :**

- వ్యాపార సంస్థల కరపత్రములు, ఇన్సూరెన్సు కంపెనీలు ప్రచురించు కరపత్రాలు సేకరించి వాటిపై చర్చించడం.
- విద్యార్థులను కూడ కొన్ని పటాలు సేకరించి వాటితో గోల్డెన్ నిష్పత్తిని గుర్తించే విధంగా ప్రేరణ కల్గించవలెను.

**కీలకభావనలు**

గోల్డెన్‌నిష్పత్తి, బహుళనిష్పత్తి, నిష్పత్తిని శాతంతో పోల్చుట, రుసుము, VAT, లాభ,నష్టంలు చక్రవడ్డీ, చక్రవడ్డీసూత్రీకరణ, అర్థసంవత్సరమునకు చక్రవడ్డీ, చక్రవడ్డీ అనువర్తనంలు.

**'ఆధునిక మానవుని కార్యకలాపాలైన వాణిజ్యం, పరిశ్రమలు, ప్రభుత్వ యంత్రాంగము మొదలైన వాటన్నింటిని గణితశాస్త్ర తర్కం ప్రకారం ప్రదర్శించవచ్చు" – స్మిత్**

# అధ్యాయం - 4

# ప్రత్యేక అంశాలు - విశ్లేషణ

## 1. రాత లెక్కలు (Verbal problems)

**గణిత సమీకరణము :**

Know What + Know how + Know why = Know more

ఇన్‌స్టిట్యూట్ ఆఫ్ ఎడ్యుకేషనల్ సైన్స్, U.S. డిపార్ట్‌మెంట్ ఆఫ్ ఎడ్యుకేషన్ వారు నిర్వహించిన రీసెర్చ్ ఆధారముగా పద సమస్య సాధనలో సోపానములు ఈ కింది విధముగా ఉన్నవి.

**I. ఇచ్చిన పద సమస్యను చదువుము.**

- సమస్యను అవగాహన చేసుకొనుము.
- సమస్యలో ఇచ్చిన పదములను, ఉపయోగించి గణిత పరిభాషను అర్ధము చేసుకొనుము.
- ఇచ్చిన పద సమస్య ఏ రకమునకు చెందినదో గుర్తించుము.

  (నిర్మాణము, ప్రూఫ్, గ్రాఫు, పట్టికాపూరణ)

**II. ఈ చార్టును పూర్తిచేసి సాధింపుము.**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | ఇచ్చిన పద సమస్యలో ఇచ్చినవి, కనుగొనవలసిన అంశములు ఏమిటి?<br>♦ ఇచ్చిన సమస్య మీరు అర్దము చేసుకొని మీ సొంత పదములలో చెప్పగలరా?<br>♦ ఇచ్చిన సమస్యను మరో రూపములో వ్యక్తపరచగలరా?<br>♦ ఇచ్చిన సమస్యలో ముఖ్య పదాల యొక్క అర్థము ఏమి?<br>♦ ఇచ్చిన సమస్యా సాధన అవసరమైన పదమును / బొమ్మను గీయగలవా? | |
| 2. | పద సమస్యా సాధన అవసరమైన సమాచారము ఏమిటి?<br>♦ ఇచ్చిన సమాచారము, సమస్యా సాధనకు దోహదపడుతుందా గుర్తించుము.<br>♦ సమస్యలో ఏమికనుగోవాలి అని తెలుసుకొనుటకు సమస్యను సొంత మాటలలో రాసుకోవాలి.<br>♦ క్రమంలో అంశాలను రాసుకోవాలి.<br>♦ సాదృశ్యము గల మరిన్ని సమస్యల సాధన విధానములు పరిశీలించాలి.<br>♦ ఏమి కనుగోవాలి, ఇచ్చిన దానిని గణిత పరిభాషలో సాంకేతికముగా రాయాలి. | |
| 3. | పద సమస్యా సాధనకు ఇచ్చిన సమాచారము సరిపోతుందా?<br>♦ అదనపు సమాచారము ఏమైనా ఉందా?<br>♦ సమస్య సాధనకు అదనముగా కావలసిన సమాచారమును గుర్తించుము. | |

| | | |
|---|---|---|
| | ♦ ఏ పరిక్రియ నుపయోగించి, ఏ సూత్రమునుపయోగించి లేదా ఏ కృత్యము ద్వారా సాధిస్తారో గుర్తించాలి.<br>♦ సమస్యాసాధనలో అవసరమైన సిద్ధాంతము, నిరూపిత ఆధారమును గుర్తించాలి. | |
| 4. | సమస్యాసాధన ఏవిధముగా ఉంటుంది?<br>♦ సమస్యాసాధన కొరకు ఒక ప్రణాళిక / పద్ధతిని ఏర్పరచుకొనుము.<br>♦ అమరిక కొరకు ప్రయత్నించడం.<br>♦ క్రమములో అంశాలు రాసుకోవాలి.<br>♦ అవసరమైన అనుగుణమైన పటం గీయాలి.<br>♦ అవసరమైన సందర్భాలను గుర్తించి అనవసరమైన కొన్ని సందర్భాలను తొలగించాలి.<br>♦ సౌష్టవాన్ని ఉపయోగించడం.<br>♦ ఉపకరణాన్ని ఉపయోగించడం.<br>♦ అవసరమైన కృత్యమును గుర్తించి దానిని అమలుచేయాలి.<br>♦ చాతుర్యంను ప్రదర్శించాలి. | |
| 5. | సమస్య సాధింపుము | |
| 6. | **పునఃశ్చరణ**<br>మీ యొక్క సమాధానము ఏమిటి? | |
| 7. | ఏ విధముగా సాధించావు? పద్ధతి ఏమిటి? | |
| 8. | ఈ పద్ధతిలో సాధించుటకు గల కారణములు తెల్పుము? | |

# కృత్య పత్రం

## (Worksheet / Verbal Problems)

1. $2y(y + z) - (x + y)(x + z)$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

   (గమనిక : బ్రాకెట్‌ను తొలగించకుండా కారణాంక విభజన చేయండి.)

2. $\dfrac{(1986^2 - 1992)(1986^2 + 3972 - 3)(1987)}{(1983)\ (1985)\ (1988)\ (1989)}$ విలువను కనుక్కోండి?

3. 15 సెం.మీ., 20 సెం.మీ. భుజాలుగా కల్గిన ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును దాని కర్ణము వెంబడి భ్రమింప చేస్తే ఏర్పడిన ద్విశంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణమును, ఉపరితల వైశాల్యమును కనుగొనుము. ($\pi = 3.14$గా తీసుకొనుము).

4. అంతర వ్యాసార్ధము 21 సెం.మీ. గా గల ఒక స్థూపాకారపు పాత్రలో నీరు నింపబడియున్నది. 10.5 సెం.మీ. వ్యాసము గల ఒక ఘనపు గోళము నీటిలో పూర్తిగా ముంచబడినది. నీటి యొక్క మట్టములో పెరుగుదల ఎంత? (నీరు పొర్లిపోలేదు అనుకోవాలి)

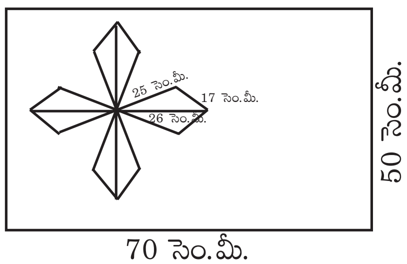
5. a, b, c, x, y, z లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

   $a^2 + b^2 + c^2 = 25$, $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ మరియు $ax + by + cz = 30$ అయిన $\dfrac{a + b + c}{x + y + z}$ విలువను కనుగొనుము.

6. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజాల కొలతలలో అతి చిన్నది 2003. మిగిలిన భుజాలు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన దాని యొక్క పరిధిని కనుగొనుము.

7. ఒక గోళము యొక్క వ్యాసార్ధము 5 సెం.మీ. గోళము ఉపరితలవైశాల్యము, 4 సెం.మీ. వ్యాసార్ధము కల్గిన శంఖువు వక్రతల వైశాల్యమునకు 5 రెట్లు అయిన శంఖువు యొక్క ఎత్తు, ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము. ($\pi = \dfrac{22}{7}$)

8. 50 × 70 సెం.మీ. కొలతలు గల దీర్ఘ చతురస్రాకార పలకపై పటములో చూపిన విధముగా డిజైన్ గీయబడింది. ఈ డిజైన్‌లో 26 సెం.మీ., 17 సెం.మీ. మరియు 25 సెం.మీ. కొలతలుగా గల 8 త్రిభుజములు ఇయ్యబడ్డాయి. డిజైన్ యొక్క మొత్తము వైశాల్యమును కనుగొని, డిజైన్ లేని ప్రాంతము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.




9. $2222^{5558} + 5555^{2222}$, 7చే నిశ్శేషముగా భాగింపబడునని ఋజువుచేయుము.

10. ABCD దీర్ఘచతురస్రము. AB = 16 యూనిట్లు, మరియు BC = 12 యూనిట్లు F, AB పై బిందువు., E, CD పై బిందువు, AFCE ఒక సమచతుర్భుజము అయితే EF కొలతను కనుగొనుము.

11. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots\ldots\ldots + 2013} = ?$

12. a మరియు b లు 4 అంకెల సంఖ్యలు. a > b మరియు ఒక సంఖ్యను తిరగేసి రాయగా మరో సంఖ్య వస్తుంది. $\frac{a+b}{5} = \frac{b-1}{5}$ అయితే b విలువను కనుగొనుము.

13. $x + y + z + t = 1$

$x + 3y + 9z + 27t = 81$

$x + 4y + 16z + 64t = 256$

$x + 167y + 167^2z + 167^3t = 167^4$ అయితే x విలువను కనుగొనుము?

14. $$\frac{(1+17)\left(1+\frac{17}{2}\right)\left(1+\frac{17}{3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{17}{9}\right)}{(1+19)\left(1+\frac{19}{2}\right)\left(1+\frac{19}{3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{19}{17}\right)}$$

15. x-అక్షమునకు సమాంతరముగా యున్న ఒక రేఖ $y = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ సమీకరణమును సూచించు గ్రాఫును x = a, x = b వద్ద ఖండిస్తే $(a-1)(b-1)$ విలువను కనుగొనుము.

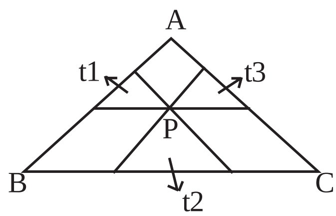
16. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజాలు a, b. a > b. లంబకోణమును సమద్విఖండన చేయురేఖ త్రిభుజమును రెండు సరూప లంబకోణ త్రిభుజములుగా విభజిస్తే ఆ రెండు త్రిభుజాల లంబకేంద్రముల మధ్య దూరమును కనుగొనుము. (విశ్లేషిక రేఖాగణిత పద్ధతి నుపయోగించుము)

17. $x^{2013}$ ను $(x^2 - 1)$ చే భాగించగా వచ్చు శేషము ఎంత?

18. [YE] [ME] = [TTT] అయితే Y + E + M + T విలువ ఎంత?

YE, ME లు రెండంకెల సంఖ్యలు, TTT మూడంకెల సంఖ్య.

19. $\triangle ABC$ అంతరములో ఒక బిందువు. దాని గుండా మూడు రేఖలు ఒక్కొక్కటి, ఒక్కొక్క భుజమునకు సమాంతరముగా గీయబడి, త్రిభుజమును 6 భాగాలుగా విభజించాయి. $\triangle ABC$ లో మూడు చిన్న త్రిభుజాలు $\triangle t_1, \triangle t_2, \triangle t_3$ ల వైశాల్యములు వరుసగా 4, 9, 16 చదరపు యూనిట్లు అయితే $\triangle ABC$ త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుగొనుము.




20. పూర్ణసంఖ్యలు భుజాలుగా గల్గిన లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క అంతరవృత్త వ్యాసార్ధము కూడా పూర్ణసంఖ్య అని చూపుము.

21. $x, y \in z$ మరియు $x < y, x^2 + y^2 = 2000$ అయితే $31 < y < 45$ అని చూపము.

22. త్రిభుజము ABC లో అంతరవృత్తము త్రిభుజ భుజాలను BC, CA మరియు AB లను D, E మరియు F ల వద్ద స్పృశించు చున్నది. అంతరవృత్త వ్యాసార్ధము 4 సెం.మీ. మరియు BD, CE, AF లు వరుస పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన త్రిభుజ భుజాల కొలతలను కనుగొనుము.

23. $(a^2 + b^2)^3 + (a^3 + b^3)^2$ మరియు $ab \neq 0$ అయితే $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ల యొక్క సంఖ్య విలువలను కనుగొనుము.

24.
```
 T I C K
 T O C K
 T I C K
 T O C K
       A
---------
C L O C K
---------
```
సంకలనము పూరింపుము

T, I, C, K, O, L, A విలువలను కనుగొనుము.

(T, I, C, K, O, L, A లు అంకెలు పునరావృత్తం కానివి)

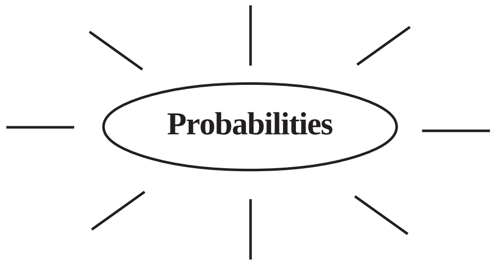
# 2. సంభావ్యత

## (Probability)

1. (a) సంభావ్యత అనగా నేమి?

   (b) సంభావ్యత నేర్చుకోవలసిన అవసరం ఏమి?

సంభావ్యత అనగానేమి? (Brain stroming)




మనం నివసించే ప్రపంచం అనిశ్చితమైనది. మానవుని చుట్టూ ఉండే పరిస్థితులు అన్నీ తన అధీనంలో ఉండవు. వాటిలో ప్రకృతి శాసించేవి కూడా ఉంటాయి. ఉదాహరణకి మనం ఒక ప్రదేశాన్ని చేరుకోవాలంటే అనేక దారులు ఉన్నట్లయితే; ఏ దారి నుండి వెళితే త్వరగా, సురక్షితంగా వెళ్ళవచ్చు? మనకు తెలిసిన వారికి గుండె ఆపరేషన్ చేయించాల్సివస్తే ఏ హాస్పిటల్‌లో చేయిస్తే విజయవంతమవుతుంది? వచ్చే 3 రోజులలో వాతావరణ పరిస్థితులు ఏవిధంగా ఉంటాయి? 10 గంటలకు బయలుదేరవలసిన రైలు సరియైన సమయానికి బయలుదేరుతుందా?

ఇలాంటి ప్రశ్నలు నిత్యజీవితంలో మనకు తారసపడుతుంటాయి. మనం ఒక విషయం భవిష్యత్తులో ఏవిధంగా జరుగుతుందో ఊహించడానికి ఉత్సాహాన్ని చూపిస్తాము. మనం ఊహించి నిర్ణయం తీసుకోవడానికి అనేక విషయాలు దోహదపడుతాయి. ఈ విధంగా ఊహించి ఒక విషయంపై నిర్ణయం తీసుకోవడానికి మనకు సంభావ్యతపై పరిజ్ఞానం అవసరం. సంభావ్యతను తెలపడానికి మనం భిన్నాలు, దశాంశాలు లేదా శాతాలను ఉపయోగిస్తాము. **"సంభావ్యత అనగా ఏదేని ఒక సంఘటన జరిగే/ఏర్పడే అవకాశాన్ని సంఖ్యామాపనంగా తెలిపేది."**

✦ **సంభావ్యత ఉపయోగాలు :**

సంభావ్యతను ఉపయోగించి మనం మనకు తెలియకుండానే అనేక నిర్ణయాలు తీసుకొంటాము.

**వైద్యపరమైన నిర్ణయాలు :** మనకు కావలసిన వారికి అత్యవసరంగా శస్త్ర చికిత్స చేయాలంటే, మనకు తెలియకుండానే అందుబాటులో ఉన్న మంచి ఆసుపత్రికి, తీసుకొని వెళ్తాము. దానికోసం ఎక్కువ శస్త్ర చికిత్సలను విజయవంతంగా చేసిన డాక్టరు కోసం చూస్తాం.

**క్రీడారంగం :** ఒక ఆటగాడిని జట్టుకు ఎంపిక చేయాలంటే అతని గత రికార్డులు మరియు అతని ఆట తీరు లాంటి వాటిని రేటింగ్స్ చేసి తీసుకొంటారు.

**ఇన్సూరెన్స్ రంగం :** భీమా కంపెనీలు భీమా ఇచ్చేటప్పుడు వారి వయసు, ఆరోగ్యపరిస్థితి, ఆ వయసులో ఉన్నవారి మరణాల రేటు యొక్క సంభావ్యతను దృష్టిలో ఉంచుకొని నిర్ణయిస్తారు.

**వాతావరణ శాఖ :** గడచిన కొద్ది రోజుల నుండి ఉన్న ఉష్ణోగ్రతలను, సంవత్సరంలోని ఆకాలములో వచ్చిన తుఫానులను బట్టి అంచనా వేస్తారు.

1. ఒక సంఘటన సంభావ్యత 0 మరియు 1ల మధ్య (0, 1 కలిపి) ఉంటుంది. ఈ సంభావ్యత రెండు పద్ధతుల ద్వారా కనుగొంటాము.

   i) ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత ii) సైద్ధాంతిక సంభావ్యత

   **i) ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత :** ఈ పద్ధతిలో సంభావ్యతను కనుగొనుటకు (అంచనావేయుటకు) ప్రయోగాన్ని చాలా ఎక్కువసార్లు చేస్తాము. ఇలా ఎక్కువసార్లు చేసిన ప్రయోగంలో మనకు కావలసిన మనకు కావలసిన ఘటన ఎన్నిసార్లు సంభవించిందో నమోదు చేస్తాము.

   A అనే ఒక ఘటన అయిన, దాని ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత

   $$P(A) = \frac{\text{అనుకూల యత్నాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం యత్నాల సంఖ్య}}$$

   ఈ సంభావ్యత నిగమన పద్ధతిలో ఉంటుంది.

ప్రయోగ సంభావ్యత V/s సైద్ధాంతిక సంభావ్యత

చాలాసార్లు ప్రయోగానికి ముందే దానిని సైద్ధాంతికంగా సంభావ్యతను అంచనావేస్తాము. కాని ప్రయోగం చేసిన తర్వాత ఏర్పడే సంభావ్యతకు అంచనావేసిన సైద్ధాంతిక సంభావ్యతకు తేడా ఉంటుంది. ప్రయోగాన్ని చాలాసార్లు చేసినట్లయితే, దాని సంభావ్యత అది సైద్ధాంతిక సంభావ్యతకు దగ్గరగా ఉంటుంది.

ఉదా:

| ప్రయోగ సంభావ్యత | సైద్ధాంతిక సంభావ్యత |
|---|---|
| ఒక నాణేన్ని 10 సార్లు ఎగుర వేసినప్పుడు 3 సార్లు బొమ్మ, 7 సార్లు బొరుసు పడింది. అయిన బొమ్మపడిన సంభావ్యత ఎంత?<br>P బొమ్మ = $\frac{3}{10}$ = 0.4 | ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ పడే సంభావ్యత ఎంత?<br>మొత్తం పర్యవసానాలు = 2<br>అనుకూల పర్యవసానాలు = 1<br>P బొమ్మ = $\frac{1}{2}$ = 0.5 |

ఇక్కడ ప్రయోగ సంభావ్యత మరియు సిద్ధాంత సంభావ్యతల మధ్య వ్యత్యాసం ఉంది. కాని ప్రయోగాన్ని మళ్ళీ మళ్ళీ చేసి ప్రయోగ సంభావ్యత, సిద్ధాంత సంభావ్యతను సమీపిస్తుంది. కొంత మంది గణిత శాస్త్రజ్ఞులు నాణేన్ని చాలా ఎక్కువసార్లు ఎగురవేసి ఫలితాలు నమోదుచేశారు. కాని క్రింది గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ప్రయోగ ఫలితాలు గమనించండి.

| పేరు | నాణెం ఎగురవేసిన సంఖ్య | బొమ్మల సంఖ్య | సైద్ధాంతిక సంభావ్యత |
|---|---|---|---|
| బఫన్ (ఫ్రెంచ్) | 4040 | 2048 | $\frac{2048}{4040}$ = 0.5069 |
| జాన్‌కెర్రిచ్ (ఇంగ్లీషు) | 10000 | 5067 | $\frac{5067}{10000}$ = 0.5069 |
| కార్ల్‌పియర్సన్ (ఇంగీషు) | 24000 | 12012 | $\frac{12012}{24000}$ = 0.5069 |

సైద్ధాంతికంగా ఒకసారి నాణేన్ని ఎగురవేసిన సంభావ్యత = $\frac{1}{2}$ = 0.5 పై పట్టికను గమనించిన కార్ల్‌పియర్సన్ 24,000 సార్లు నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు వచ్చిన ప్రయోగాత్మక సంభావ్యత 0.5005 (దాదాపు సైద్ధాంతిక సంభావ్యతకు దగ్గరగా) వచ్చింది.

ఉదా : 2

<table>
<tr><th>ప్రయోగ సంభావ్యత</th><th>సైద్ధాంతిక సంభావ్యత</th></tr>
<tr><td>ఒక సంచిలో 6 గోళీలు ఉన్నాయి. వాటిలో 3 ఎర్రగోళీలు, 3 నీలం గోళీలు కలవు. అయిన యాదృశ్చికంగా ఒక గోళీని సంచి నుండి తీసిన అది ఎరుపు గోళీ వచ్చే సంభావ్యత ఎంత<br>P బొమ్మ = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$</td><td>ఇదే సమస్యను ప్రయోగం ద్వారా చేసి ఫలితాలు నమోదు చేసిన.<table><tr><th>యత్నము</th><th>ఎరుపు</th><th>నీలం</th></tr><tr><td>1</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td></td><td>1</td></tr></table>P (ఎరుపు) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$</td></tr>
</table>

రెండింటి సంభావ్యతల మధ్య వ్యత్యాసం కలదు. ఒకవేళ ప్రయోగాన్ని చాలాసార్లు చేసినట్లయిన అది 0.5కు సమీపిస్తుంది.

> 9వ తరగతి పాఠ్యపుస్తకంలోని సంభావ్యత అధ్యాయంలో ఇచ్చిన లెక్కలు మీ గ్రూపులో చర్చించండి. వీటిలో ఏయే లెక్కలు ఏ సంభావ్యతకు చెందుతాయో కారణాలు తెల్పండి.

**కృత్యం చేయండి :**

రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినప్పుడు వాటి పై ముఖం (Head) పై

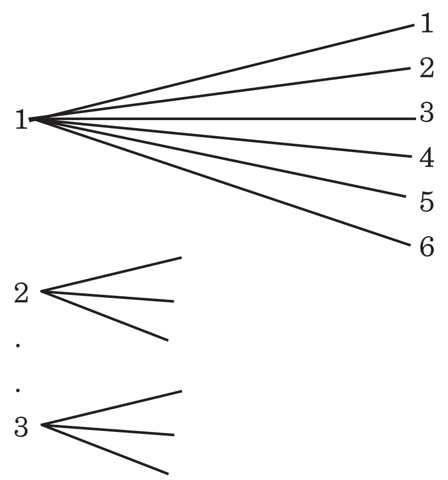
1) గరిష్ఠంగా వచ్చు స్కోరు మొత్తం = ________

2) కనిష్ఠంగా వచ్చు స్కోరు మొత్తం = ________

దానిని తెలుసుకొనుటకు కింది ప్రయోగాన్ని చేద్దాం (ప్రయోగపద్ధతి) :

a) రెండు పాచికలను ఒక సారి దొర్లించిన సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు = ________

Hint: మొదటి పాచిక రెండవ పాచిక




= 6

b) రెండు పాచికలను రెండుసార్లు దొర్లించిన సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు సంఖ్య = ____________

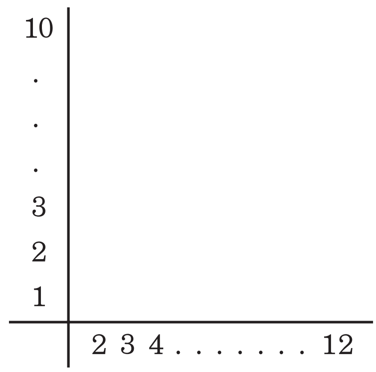
c) రెండు పాచికలను మూడుసార్లు దొర్లించిన సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు సంఖ్య = $\frac{108}{(\text{ఎందుకు})}$

పాచికను 108 సార్లు (ఎక్కువసార్లు దొర్లించుట ఎందుకు) దొర్లించిన వాటిపై ముఖంపై స్కోరుల మొత్తాన్ని కింది పట్టికలో నమోదు చేయండి.

| **సాధ్యమయ్యే మొత్తం** | **గణన చిహ్నాలు** | **పౌనఃపున్యం** |
|---|---|---|
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 12 | | |
| | **మొత్తం** | **108** |

పై పట్టికను ఉపయోగించి కమ్మీ రేఖాచిత్రాన్ని నిర్మించండి.

కమ్మీ రేఖాచిత్రం నుండి అధిక సంభవమైన స్కోరు = ____________




**సైద్ధాంతిక సంభావ్యత (B)**

మొదట రెండు పాచికలపై సాధ్యమయ్యే మొత్తాన్ని కింది పట్టికలో నమోదుచేయండి.

2వ పాచిక

1వ పాచిక

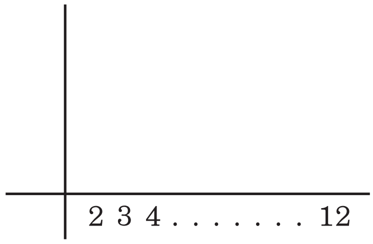
| మొత్తం | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

పట్టిక నుండి కింది దానిని పూర్తిచేయండి.

| మొత్తం | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| అవి ఏర్పడిన సంఖ్య | | | | | | | | | | | |

దీని కమ్మీరేఖా చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

అధిక సంభవమైన స్కోరు = ________________




రెండు పద్ధతులలో (A, B) ప్రత్యేకంగా కింది ప్రశ్నలు చర్చించండి.

1. కమ్మీల పొడవులు ఒకే విధంగా ఉన్నాయా? ____________
2. అధికంగా సంభవించిన స్కోరు ____________
3. కమ్మీ రేఖాచిత్రాలలో సౌష్ఠవంగా ఉన్నాయా? ____________

**గమనిక :**

ఒక ప్రయోగాన్ని ఎక్కువసార్లు చేసినప్పుడు ఆ ప్రయోగ సంభావ్యత సైద్ధాంతిక సంభావ్యతకు సమీపిస్తుంది. ఈ భావన గణితములో సాంఖ్యాకశాస్త్రం మరియు సంభావ్యతకు మూలం ఇది 1713లో బెర్నోలీ ప్రతిపాదించారు.

దీనినే Law of Large numbers అంటారు.

ఉపాధ్యాయునికి మరియు విద్యార్థికి పాఠ్యపుస్తకం ముఖ్యమైన వనరు. ఉపాధ్యాయుడు పాఠ్యపుస్తకాన్ని తాము బోధించే పాఠాలకు సంబంధించిన ప్రణాళికలు తయారుచేసుకోడానికి, బోధించవలసిన గణిత భావనలు, పద్ధతులు తెలుసుకోడానికి ఉపయోగిస్తారు. పిల్లలు పాఠ్యపుస్తకాన్ని భావనలు మరియు పద్ధతులు తెలుసుకోడానికి ఉపయోగిస్తారు.

– SCF 2011

# కృత్య పత్రం

## (Wroksheet / Probability)

"ఈ రోజు వార్తలలోని ముఖ్యాంశాలు ఏవిధంగా ఉండవచ్చు?"

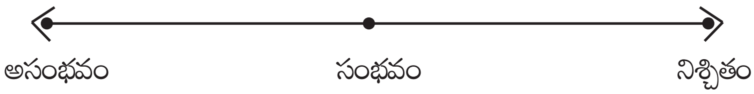
లక్ష్యము : ఈ కృత్యము తర్వాత శిక్షణార్థులు నిత్యజీవితంలో జరిగే విషయాలను, అవి ఏర్పడే అవకాశాలను బట్టి సంభావ్యత పరిభాషలో చెప్పగలుగుతారు.

సమూహాలు : ప్రతి సమూహానికి 4 గురు ఉండేటట్లు మొత్తం 6–7 సమూహాలుగా విభజించండి.

సామాగ్రి : చార్ట్‌పేపర్, స్కెచ్, గ్లూ, కత్తెర, పాత వార్తాపత్రికలు.

"గ్రూపులలో చర్చించి ఆ రోజు రాత్రి 9 గం॥ ప్రసారమయ్యే వార్తలలోని 5 ముఖ్యాంశాలను ఏవి ఉండవచ్చో ఊహించండి." (10 ని॥లు)

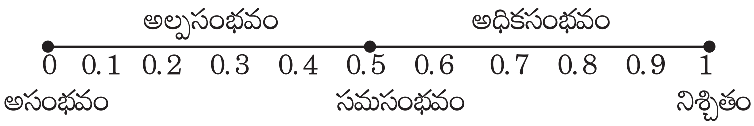
(On board)




10 ని॥ తర్వాత ఏదైన ఒక సమూహ నల్లబల్లపై తమ వార్తా ముఖ్యాంశాలలోని మొదటి అంశాన్ని రాస్తారు. మొత్తం తరగతిలో చర్చించి మొదటి వార్తా అంశం అది సంభవించే అవకాశాలను బట్టి పై స్కేలులో గుర్తిస్తాము.

ఒకవేళ పై స్కేలులో ఉన్న బిందువులలో కాకుండా వేరే ప్రదేశంలో ఆ వార్తాంశాన్ని గుర్తించవలసి వస్తే వాటికి ఏయే పదాలు ఉపయోగించాలి.

అధికసంభవం, అల్పసంభవం




శిక్షణార్థులు సంభావ్యత అధ్యాయాన్ని (4.1) పేజి. 292 చదువుతారు. (10 ని॥లు)

తమ సమూహంలో చర్చించి రాసిన వార్తా ముఖ్యాంశాలను పైన తెల్పబడిన విధంగా శ్రేణీకరణ చేసి రాస్తాము.

**ప్రదర్శన :**

ప్రతి సమూహ వారి వారి వార్తా ముఖ్యాంశాలను అసంభవం, అల్పసంభవం, సమసంభవం, అధిక సంభవం, నిశ్చితం లాంటి పదాలను ఉపయోగించి ప్రదర్శన చేస్తారు.

# 3. గణితములో నిరూపణలు

## (Proofs in Mathematics)

### 1. అనిర్వచనీయ పదాలు (Undifined terms) :

గణితశాస్త్రము వేరే ఏ ఇతర శాస్త్రాలపైన ఆధారపడక స్వతంత్రమైనది. కావున ఇందులోని పదములను నిర్వచించాలంటే వేరొక గణిత పదములో వివరించాలి. తిరిగి రెండవ పదాన్ని మూడవ పదముతో వివరించాలి. ఈ విధంగా తిరిగి తిరిగి మళ్ళీ మొదటి పదానికి చేరాల్సి వస్తుంది. ఈ స్థితి నుండి బయటపడాలంటే అనిర్వచనీయ పదాలుండాలని అరిస్టాటిల్ ప్రతిపాదించాడు. 19 శతాబ్ది ప్రారంభము వరకు ఏ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు కూడ వీటిపై దృష్టి సారించలేదు. 1882లో మార్జిజ్ పాచ్‌తో అనిర్వచనీయపదాల ప్రాముఖ్యత వచ్చింది.

అనిర్వచనీయ పదాలను నిర్వచించకుండా వారి భావనను మాత్రమే వివరించబడుతుంది. గణితంలో బిందువు, రేఖ, తలము, సంఖ్య, శూన్యము మొదలగునవి అనిర్వచనీయ పదాలుగా తీసుకొన్నారు. వీటి సంఖ్య సమితివాద ప్రవేశముతో తగ్గింది. ఎందుకనగా సమితివాదము గణితశాస్త్ర వివిధ భాగాలను కలుపుతుంది.

### నిర్వచనాలు (Definitions) :

ఒక పదాన్ని నిర్వచించాలంటె ఆ పదము వివరించు విషయములపై స్పష్టమైన అవగాహన ఉండాలి. ఒక పదము నిర్వచనను అంటే అది తెల్పు భావనను ఇతర పదాలతో చెప్పడము.

మంచి నిర్వచనములో (1) నిర్వచిత పదము పేర్కొనబడాలి (2) నిర్వచించుటకు అంతకు ముందు నిర్వచించబడిన పదాలు (లేక అనిర్వచిత పదాలు) మాత్రమే వాడాలి. (3) నిర్వచిత పదము ఏ తరగతికి చెందునో వివరించి అది మిగిలిన పదములతో ఏ విషయములో విభేదించుచున్నదో తెల్పాలి. (4) అనవసర విషయము లుండకూడదు (5) దీనికి విపర్యయము కలదు.

ఉదా: 1) మూడు భుజములు గల బహుభుజి త్రిభుజము. వివరణ: 1) నిర్వచిత పదము త్రిభుజము పేర్కొనబడింది (2) అది చెందు తరగతి బహుభుజాలు చెప్పబడింది (3) వేరు వేరు బహుభుజాలు భుజముల సంఖ్య (మూడు)తో విభేదించునని చూపబడింది.

ఉదా: మూడు భుజములు మూడు కోణములు గల బహుభుజి త్రిభుజము.

వివరణ : ఇందులో 'మూడు కోణములు' అవసరములేదు.

### 2. స్వీకృతాలు (Axioms) :

హేతుబద్ధ తార్కిక వ్యవస్థ గల ఏ శాస్త్రమైనను అందరికి అంగీకృతమైన కొన్ని మౌళిక భావనలతో ప్రారంభించాల్సి వస్తుంది. ఈ భావనలకు నిరూపణ ఉండదు. వీటిని సత్యముగా తీసుకొని వేరు భావనలు నిర్మిస్తాము. ఇవి అందరిచే సత్యములుగా అంగీకరించబడిన భావనలు.

గణిత శాస్త్రములో నిరూపణ లేకుండా సత్యములుగా స్వీకరించ బడిన మౌళిక భావనలను స్వీకృతాలు అన్నారు. ఉదా: (1) ఒక వస్తువు దాని భాగముకన్న పెద్దది (2) సమాన రాశులకు సమాన రాశులు కలిపిన వచ్చు రాశులు సమానాలు మొదలగునవి.

రేఖా గణితంలో నిరూపణ లేకుండా తీసుకొన్న భావనలను స్వీకృతాలు ప్రతిపాదనలు అన్నారు. ఉదా: (1) రెండు బిందువుల గుండాపోవు ఒక రేఖఉండును (2) దత్త వ్యాసము గల్గిన వృత్తము గీయవచ్చును. మొదలగునవి.

ఐతే ప్రస్తుతము గణితశాస్త్ర విభాగములతో సంబంధము లేకుండా అన్ని మౌళిక భావనలను స్వీకృతాలు (Axioms) అని వాడుచున్నాము.

### 3. సిద్ధాంతాలు – పరికల్పనలు (Theorems - conjuctures) :

అనిర్వచనీయ పదాలు, నిర్వచిత పదాలు, స్వీకృతాల భావనల నుండి హేతుబద్ధ తార్కికతో నిగమన పద్ధతి ద్వారా ఏర్పడిన ప్రవచనములు (భావనలు) సిద్ధాంతములు ఇవన్నియు అనుషంగిక ప్రవచనములే.

గణితశాస్త్రములో వచ్చు వివిధ అంశముల అమరికలు / విన్యాసాలను పరిశీలించి చెప్పబడు ప్రవచనము పరికల్పన. ఇవన్నియు అనుషంగికాలే. ఇది పరిశీలన ద్వారా చెప్పబడినవి కాన నిరూపణలేదు. ఎప్పుడైతే పరికల్పన నిరూపించబడుతుందో అది సిద్ధాంతమవుతుంది.

ఉదా: 1) గోల్డ్ బ్యాక్ పరికల్పన

2) రీమాన్ పరికల్పన

3) ఫిబొనాకి సంఖ్యలలో 144 మాత్రమే వర్గసంఖ్య.

మొన్న మొన్నటి వరకు నాల్గువర్ణముల సమస్య (Four clolur problem) కూడ పరికల్పననే కాని అది నిరూపితమైనది.

నిజానికి చెప్పాలంటే సిద్ధాంతాలు / పరికల్పలన్ని పరిశీలన ద్వార గణితశాస్త్ర అంశములను కలుపుతు చెప్పబడిన ప్రవచనాలే. నిరూపణ తరువాత జరుగును. ప్రతి సిద్ధాంతము పరికల్పనతోనే ప్రారంభమవుతుంది. పైథాగరస్ సిద్ధాంతము మొదట చెప్పబడింది. తరువాత నిరూపించబడింది.

### 4. ప్రవచనము :

సత్యముల ఏక అసత్యము అని నిర్ణయింపదగు సంపూర్ణ వాక్యమును ప్రవచనము అంటారు. అనగా ప్రతి నిర్వచనము ఒక సత్యప్రవచనమే.

గణితంలో ప్రవచనాలు నిరూపించబడతాయి. ఇతర శాస్త్రములలో అవి సరిచూడబడతాయి లేక పరిక్షించబడతాయి. గణితశాస్త్ర ప్రవచనములు అంతకు ముందే తెలిసిన విషయముల నుండి నిగమన పద్ధతిద్వారా రాయబడినవి. ఇతర శాస్త్ర ప్రవచనాలు ప్రయోగములు, పరిశీలనల ద్వారా గమనించిన విషయాలు హేతుకీకరణద్వారా చెప్పబడినవి. అందుకే సాపేక్షతా సిద్ధాంతము సరిచూచుట, పరీక్షించుట మాత్రమే జరిగినది కానీ నిరూపించబడలేదు.

### 5. నిరూపణ అంటే ఏమిటి?

గణిత ప్రవచనపు నిరూపణ అంటే హేతుబద్ధ తార్కిక వాదనలతో ప్రవచనపు సత్యతను నిర్ధారించుట. దీనిలోని సోపానములన్ని అనుషంగిక ప్రవచనాలే. నిరరూపణ అంటే అంగీకృత వాదన అని చెప్పవచ్చు.

**నిరూపణ ప్రాముఖ్యత :**

దిగువ ఉదాహరణాన్ని గమనించండి.

ఉదా:– $\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000000}$ అని చూపుము.

నిరూపణ:– $\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} = \frac{1001-1000}{1001000} = \frac{1}{1001000}$

కాని 1001000 > 1000000 కావున $\dfrac{1}{1000} - \dfrac{1}{1001} < \dfrac{1}{1000000}$

క్యాలుకులేటర్ లేదా కంప్యూటర్‌తో పై ప్రవచనాన్ని సరిచూసుకొనవచ్చును. నిరూపణ శ్రమ తప్పుతుంది. కాని గణితములో అవగాహన ముఖ్యము. యంత్రము జవాబు చెబుతుంది. కాని ఎందుకు అనే ప్రశ్నకు సమాధానం చెప్పదు. అదియేగాక నిరూపణ సామాన్యీ కరణానికి బాట వేస్తుంది. ఉదా: $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n^2}$ రాబట్టవచ్చు అంతేగాక కంప్యూటరులలో సంఖ్యలోని అంకెలకు పరిమితి గలదు. పరిమితిని మించిన అది ఉజ్జాయింపు విలువలు మాత్రమే చెబుతుంది. కచ్చితత్వము ఉండదు.

## 6. గణిత ప్రవచనాన్ని ఎలా నిరూపించాలి?

గణితశాస్త్ర ప్రవచనముల నిరూపణకు ప్రత్యేకమైన పద్ధతులు ఏవియులేవు. అందుకు ఫర్మా సిద్ధాంత నిరూపణకు 300 సంవత్సరాలయింది. ఇంకను ఎన్నో పరికల్పనలు అలానే మిగిలిపోయాయి. కాని పోల్యాగారు సూచించిన విధంగా ఆలోచిస్తే మనకు క్లూ దొరకవచ్చు.

మొట్టమొదట నిరూపించాల్సిన ప్రవచనాన్ని అర్థం చేసుకోవాలి. అనగా మన లక్ష్యమేమో తెలుసుకోవాలి. దీనికై సారాంశ భాగమేది? దత్తాంశ భాగమేది? ఇచ్చిన షరతులేమి? అని నీలోనీవే ప్రశ్నించుకోవాలి. సాధ్యమైనచోట సమస్యను రేఖాచిత్రము / పటము ద్వారా ప్రదర్శించి దత్తాంశ సారాంశాలను సరియైన సంకేతాలతో ప్రదర్శించాలి.

పిదప దత్తాంశ సారాంశాలకు గల సంబంధాన్ని గుర్తించాలి. నేరుగా లేకున్న చిన్న చిన్న ఉపలక్ష్యాలతో సంబంధాన్ని ఏర్పరచాలి.

## 7. నిరూపణ ఎలా రాయాలి?

i) సమాచారాన్ని (సమస్యలోని) సూచించు పటమును గీయాలి.

ii) సమస్యలోని దత్తాంశాన్ని పదముతో అన్వయము చేస్తూ రాయాలి.

iii) సమస్య / ప్రవచనములోని సారాంశాన్ని పదముతో అన్వయము చేస్తూ రాయాలి.

iv) గమ్యం చేరుటకు ఇంకను కావలసిన సమాచారముకై పటమును క్షుణ్ణంగా అధ్యయనం చేయాలి.

v) పిదప నిరూపణ రాయుట ప్రారంభించాలి. వారు ప్రతిప్రవచనమునకు కారణమును తెల్పాలి. దిగువ తెల్పిన విషయాలను కారణాలుగా చూపవచ్చును. (ఎ) స్వీకృతములు (బి) నిర్వచనములు (సి) దత్తాంశము (డి) పూర్వము నిరూపించిన ప్రవచనాలు.

## 8. నిరూపణ విధానం :

a) దత్తాంశం

b) సారాంశం

c) పటం

| d) ఉపపత్తి సోపానములు / ప్రవచనాలు | కారణాలు |
|---|---|
| 1) ____________ | 1) ____________ |
| 2) ____________ | 2) ____________ |
| 3) ____________ | 3) ____________ |
| 4) ____________ | 4) ____________ |
| 5) ____________ | 5) ____________ |

## 9. నిరూపణ పద్ధతులు :

**1) ప్రత్యక్షనిరూపణ :** (i) ప్రత్యక్షనిరూపణలో సిద్ధాంతము $H \rightarrow C$ (దత్తాంశం – సారాంశం) లో H సత్యముగా తీసుకొని తార్కిక కారణాలతో తెలిసిన సమాచారాన్ని ఉపయోగించి C చేరుకొంటాము. ఇందులో సోపానాలలో $H \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \ldots\ldots \rightarrow C$ లుగా వివరిస్తే, ఇందులో $C_1$, $C_2$, $C_3$. . . . లు ఉపలక్ష్యాలను ఉపయోగిస్తాము.

ఉదా: a, b లు వాస్తకవ సంఖ్యలు $a > b$ అయిన $a^2 < b^2$ అని చూపుము.

నిరూపణ:

$a < b \Rightarrow a^2 < ab$ ఇరువైపుల a చే గుణించగా

$\Rightarrow ab < b^2$ ఇరువైపుల b చే గుణించగా

$\Rightarrow a^2 < ab < b^2$ సంక్రమణ న్యాయము.

$\Rightarrow a^2 < b^2$

<u>(ii) తిరోగమన పద్ధతి :</u> సారాంశము నుండి దత్తాంశమునకు వ్యతిరేక దిశలో సోపానములు రాయుట. ఇది దత్తాంశము నుండి సారాంశము రాయుటలో కష్టముగా నున్నప్పుడు ఉపయోగిస్తాము.

ఉదా: $a < b$ లు వాస్తవ సంఖ్యలైన $4ab < (a + b)^2$

సాధాన:

$$\begin{aligned}
4ab < (a+b)^2 \quad &\Leftarrow \quad 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \\
&\Leftarrow \quad 0 < a^2 - 2ab + b^2 \\
&\Leftarrow \quad 0 < (a-b)^2 \\
&\Leftarrow \quad a - b \neq 0 \\
&\Leftarrow \quad a \neq b \\
&\Leftarrow \quad a < b
\end{aligned}$$

కావున $a < b$ అయిన $4ab < (a + b)^2$

**2) పరోక్ష పద్ధతి :** ఇందులో సారాంశపు ప్రత్యామ్నాయాలన్ని పరిగణలోనికి తీసుకొనబడును. ప్రత్యామ్నాయాలన్నిటిలో ఏదో ఒకటి మాత్రమే సత్యముగా ఉండవలెను. ప్రత్యామ్నాయాలని అసత్యములని చూపుదుము. కావున మనకు సారాంశము మాత్రమే సత్యముగా మిగులును.

ఉదా॥ రెండు సరళ రేఖలు ఖండించుకొనిన అవి ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండిచు కొనును.

ఇందులో సారాంశము రెండు రేఖలు ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును దీనికి ప్రత్యామ్నాయము ఒకటి కంటె ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించు కొనును.

కావున ఒకటి కంటె ఎక్కువ అనగా రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిచును అనుకొనిన దత్తాంశానికి వ్యతిరేకతను సూచించునని చూపెదము. దత్తాంశము సత్యముగా తీసుకొంటాము కావున ప్రత్యామ్నాయము. ఒకటి కంటె ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనుటము తప్పు. కానీ ప్రవచన నిరూపణ.

(i) $x^2 - 4y = 3$ అగునట్టు x, y సహజ సంఖ్యలుండవు దత్తాంశము; $x^2 - 4y = 3$

సారాంశము x, y లు సహజ సంఖ్యలు కావు.

సాధన : సారాంశానికి ప్రత్యామ్నాయము x, y లు సహజసంఖ్యలు అనుకొనిన అవి సరియో బేసియో కావలెను.

సందర్భము (a) x సరిసంఖ్యయైన

$x = 2z$ అనుకొనుము.

$\therefore (2z)^2 - 4y = 3 \Rightarrow 4z^2 - 4y = 3 \Rightarrow 4(z^2 - y) = 3$

కావున 3, 4 యొక్క గుణిజము, ఇది అసత్యము.

సందర్భము (b) x బేసి సంఖ్య యైన

$x = 2x + 1$ అనుకొనుము

$(2z + 1)^2 - 4y = 3 \Rightarrow 4z^2 - 4y + 1 - 4y) = 3$

$\Rightarrow 4(z^2 + z - y) = 2 \Rightarrow 2, 4$ యొక్క గుణిజము

కావున x, సరిసంఖ్య కాదు బేసి సంఖ్యయు కాదు కావున 'x' సహజ సంఖ్య కాదు.

**3) ప్రత్యుదాహరణ :** నిజముగా ఇది నిరూపణ కాదు. ప్రవచనము తప్పు అని చెప్పుటకు వాదు తర్కము. ఉదాహరణ మాత్రమే ఇచ్చెదము.

ఉదా: (1) "ప్రధాన సంఖ్యలన్నియు బేసి సంఖ్యలే"

2. సరి ప్రధాన సంఖ్య ప్రత్యుదాహరణమగును.

వ్యతిరేకత (2) అన్నిటి కన్న పెద్ద ప్రధాన సంఖ్య ఏదియూ లేదు.

సాధన : p అతి పెద్ద ప్రధాన సంఖ్య అనుకొనిన

(2. 3. 5. 7. 11................p) + 1; p కంటె పెద్ద ప్రధాన సంఖ్య

తరగతి గది నిర్వహణలో సంఘంలోని వివిధ ఏర్పాటువాద ధోరణులను కూడా గమనించాలి. ఉదాహరణకు "కొన్ని వర్గాల వారికి గణితం అవసరం లేదు" లేదా "ఆడ పిల్లలు గణితం నేర్చుకోలేరు" వంటి నమ్మకాలు తరగతి గది నిర్వహణను ప్రభావితం చేస్తాయి. ఇదే విధంగా కొన్ని కులాలకు చెందిన వారి గురించి కూడా అపనమ్మకాలు ఉన్నాయి. ఇవన్నీ తరగతి గదిలో ప్రశ్నించబడాలి మరియు పారదోలబడాలి.

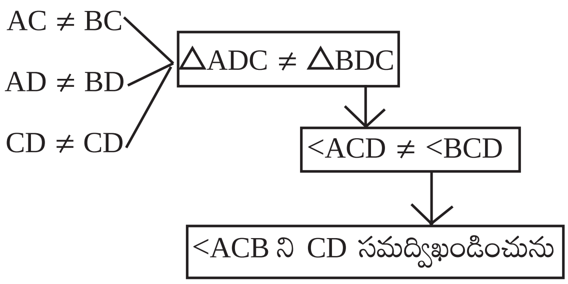
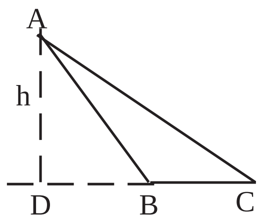
– SCF 2011

# కృత్య పత్రం

## (Worksheet on Proofs)

1. కింది ప్రశ్నలకు దానికి ఎదురుగా ఈయబడిన స్థలంలో సమాధానాలు రాయండి.
2. సమాధానము స్పష్టంగా, సహేతుకంగా, సంక్షిప్తంగా ఉండాలి.

| | ప్రశ్నలు | జవాబు |
|---|---|---|
| 1. | ఇది ఐదు పదముల వాక్యము :<br>ఇది ఐదు పదముల వాక్యము కాదు :<br>రెండింటి సత్యవిలువలు " ఏవి? | |
| 2. | "నిర్వచనము" ఏలాంటి ప్రవచనము? | |
| 3. | "ఉమ్మడి శీర్షము కలిగి ఉమ్మడి భుజానికి ఇరువైపుల గల కోణాలు ఆసన్న కోణాలు" నిర్వచనము సరిగాకలదా? లేనిచో సరిచేసి రాయండి. | |
| 4. | నిరూపణ చేయు ప్రవచనపు దత్తాంశమును ఎల్లప్పుడు సత్యముగా తీసుకొంటాము. ఎందుకు? | |
| 5. | అన్ని ఆమ్లాలు పుల్లగా ఉంటాయి; ద్రవము A పుల్లగా ఉంది. కావున ద్రవము A .......... | |
| 6. | "గోల్డ్ బాక్ పరికల్పన ఇంతవరకు నిరూపించబడలేదు" కావున అది ప్రవచనము కాదు. మీరేమంటారు? | |
| 7. | "అన్ని కోణాలు సమానములుగా గల చతుర్భుజము చతురస్రము" ప్రత్యుదాహరణ మిమ్ము. ప్రవచనాన్ని సత్యప్రవచనంగా మార్చండి. | |
| 8. | "ప్రపంచములో సమాన తలవెంట్రుకల సంఖ్యగల వారు కనీసము ఇద్దరుంటారు" ఎలా చెప్పగలవు? | |
| 9. | "నేను పొద్దుటి నుండి పేపరు వాడు కొరకు చూస్తున్నాను ఇంతవరకు రాలేదు" అన్నాడు వాట్సన్. "ఎందుకు వేచి చూడటము. ఈ రోజు పేపరు ఇక్కడ లేదు. కావున పేపరు వాడు రాలేదు" అన్నాడు షేర్లాక్ హోమ్స్. వారి వాదనలలో బేధమేమి? | |
| 10. | "రష్యా యొక్క రాజధాని మాస్కో అయిన ఇండియా రాజధాని ఢిల్లీ". దత్తాంశ సారాంశాల మధ్య సంబంధము లేదు ఐన ఇది సత్యప్రవచనము. ఎందుకు? | |
| 11. | "ఇది ఫిబ్రవరి నెల కావున ఈ నెలలో 28 రోజులే ఉంటాయి. ప్రత్యుదాహరణ ఇవ్వండి. | |

<table>
<tr><th></th><th>ప్రశ్నలు</th><th>జవాబు</th></tr>
<tr><td>12.</td><td>“ఒక కోణ భుజములకు సమాన దూరములో గల బిందువు ఆకోణ సమద్విఖండవ రేఖపై ఉండును. పటము గీచి దత్తాంశ, సారాంశాలు రాయండి.</td><td></td></tr>
<tr><td>13.</td><td>దిగువ వారిలో రెండు సార్లు నోబెల్ బహుమతి గ్రహీత<br>(1) నెపోలియన్ (2) న్యూటన్ (3) లీనస్ పాలింగ్ (4) గాలబ్<br>మిగిలినవారు ఎందుకు కారు.</td><td></td></tr>
<tr><td>14.</td><td>$\triangle ABC$ లో $AC \neq BC$ మరియు $\triangle ABC$ లో $AD \neq AB$ అయిన <ACB ని CD సమద్విఖండన చేయును” నిరూపణ క్రమచిత్రము ఇలాకలదు.<br><br><br>దీనిని రెండు నిలువు వరసల నిరూపణగా తిరిగా రాయండి.</td><td></td></tr>
<tr><td>15.</td><td>త్రిభుజము వైశాల్యమును కనుగొను సమస్యలో ప్రక్కనున్న పటము గీయబడింది. దీనికి తగు దత్తాంశ సారాంశాలనురాయండి.<br><br></td><td></td></tr>
</table>

# అధ్యాయం - 5

# అభ్యసన ఆధార పత్రాలు

## అ) సంఖ్యావ్యవస్థ - అభ్యసన ఆధార పత్రం

## (Approach paper on number system)

**A. ఆవశ్యకత :**

సహజ సంఖ్యలలో సంకలన, గుణకార పరిక్రియల వరకు మాత్రమే చేయు స్వాతంత్ర్యము కలదు. వాటిలో విలోమ పరిక్రియలైన వ్యవకలన భాగహార పరిక్రియలు ఎల్లప్పుడు సాధ్యముకాదు. వాటికి ఋణ సంఖ్యలను చేర్చగా వచ్చు పూర్ణ సంఖ్యలలో వ్యవకలన స్వేచ్ఛత కలదు. భాగహార పరిక్రియలకై అకరణీయ సంఖ్యల ఆవశ్యకత వచ్చింది. వర్గసమీకరణాల మూలలకై కరణీయ సంఖ్యలు అవసరము.

**B. భిన్నములు :**

a, b రెండు పూర్ణ సంఖ్యల క్రమయుగ్మము సామాన్య భిన్నము. దీనిని $\frac{a}{b}$ లేదా a/b గా రాయుదుము. ఇందులో $b \neq 0$; a ను లవమైన b ని హారమని పిలుస్తాం.

ఉదా : $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ మొ॥

ఉదా : $\frac{x^3+1}{x^2+1}$, $\frac{x^2+3x+4}{x}$ మొ॥ వీటిని బీజీయ భిన్నాలు అంటాము.

$\frac{a}{10^n}$ రూపంలో గల భిన్నాన్ని దశాంశ భిన్నము అంటాం. ఇందులో a పూర్ణ సంఖ్య మరియు n సహజ సంఖ్య.

**C. అకరణీయ సంఖ్య నిర్వచనము :**

"a, b లు పూర&ణసంఖ్యలై $b \neq 0$ అయినపుడు $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయగలిగిన సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు" అంటాం.

నిర్వచనాన్ని జాగ్రత్తగా గమనించండి.

(i) b ని శూన్యేతరముగా తీసుకొనడమైనది. అనగా $b \neq 0$. ఎందుకనగా ఇక్కడ b సార్థక భాజకము.

(a) a = 27, b = 3 అయినపుడు $\frac{a}{b} = \frac{27}{3} = 9$ ఇక్కడ b భాజకము.

(b) a = 27, b = 7 అయినపుడు $\frac{a}{b} = \frac{27}{3} = 3\frac{2}{7}$ ఇక్కడ సామాన్య దృక్పథంలో 'b' భాజకమే, 23 భాజ్యము, 2 విభక్తము (భాగఫలము) 2 శేషము. $\frac{a}{b}$ లు 'b' సార్థక భాజకము, '0' భాజకముగా ఉండకూడదు కావున $b \neq 0$ గా తీసుకొనడమైనది.

(ii) "$\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయగలిగిన సంఖ్యలు" అన్నాము "$\frac{a}{b}$ రూపంలో గలవి" అనలేదు. ఎందుకో కింది ఉదాహరణను గమనించండి.

$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$ ఇక్కడ $\sqrt{20}$ మరియు $\sqrt{5}$ రెండును పూర్ణ సంఖ్యలు కావు ఇది $\frac{a}{b}$ రూపంలో $(a, b \notin z)$ లేదు. కాని $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయగలిగినాము. కావున $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ అకరణీయ సంఖ్య.

(iii) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3}$ దీనిని $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయలేము కావున ఇది (కరణీయ) అకరణీయ సంఖ్యకాదు.

(iv) సామాన్యంగా $\frac{a}{b}$ లో 'b' ని ధనసంఖ్యగా రాస్తాం.

**D. స్వర్ణ నిష్పత్తి (Golden Ratio) :**

$F_1 = 1$మరియు $F_2 = 1$ లతో ప్రారంభమయి వాటి తరువాత పరంపరగా $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ అగునట్లు (n = 1, 2, 3,...) వచ్చు సంఖ్యల శ్రేణిని ఫిబనాకి సంఖ్యలు అంటాం. కావున $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$ అగును. $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$ అను అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ నుండి వచ్చినవి వాటిని. ఆరోహన క్రమంలో రాయండి. తరువాత $\frac{13}{8}$ యొక్క స్థానాన్ని నిర్ధారించండి.

పై నిష్పత్తులు (అకరణీయ సంఖ్యలు) గమనించిన అవి ఒక అవధికి చేరుతున్నట్లు అది 1.6 దగ్గరగా ఉన్నట్లు గమనిస్తాం. దీనిని "నిష్పత్తి" అధ్యాయములో స్వర్ణ నిష్పత్తి (Golden Ratio) గా పేర్కొనుట జరిగింది. తిరిగి దీనిపై కరణీయ సంఖ్యలలో చర్చిద్దాం.

ఇంకా కొన్ని సంఖ్యల వరకు ఫిబానాకి శ్రేణిని రాయండి. ఇందులో 144 మాత్రమే వర్గ సంఖ్య ఇదికాక ఇంక ఉన్నాయా? దీనికి జవాబు ఇంతవరకు కనుగొనబడలేదు.

**E. నడిమి సంఖ్యలు :**

(i) a, b రెండు సంఖ్యల సరాసరి / మధ్య సంఖ్య $\frac{a+b}{2}$ ఇది గా $a < \frac{a+b}{2} < b$ ఉండును. ఉదా: 6, 10 ల మధ్య సంఖ్య $\frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$ మరియు $6 < 8 < 10$.

(ii) a, b ల మధ్యగల సంఖ్య అనగా అది 'a' కంటే పెద్దదిగాను 'b' కంటే చిన్నదిగాను ఉండును. 3, 4, 5, 6, 7 లు 2, 8 ల మధ్యగల సంఖ్యలే.

(iii) a, b ల మధ్యగతము అనగా 'a' తో 'b' వరకు దాని మధ్యగల సంఖ్యలు ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో రాసిన వాటిలో నట్టనడిమి సంఖ్య మధ్యగతము $a < x < y < z < b$ లు y మధ్యగతము.

(iv) $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ అకరణీయ సంఖ్యలలో b, d లు ధన సంఖ్యలైనపుడు $\frac{a+c}{b+d}$ ని $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ల మధ్యస్తము (Mediant) అంటాం మరియు ఇది $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ గా ఉంటుంది.

పై వానిలో మధ్యసంఖ్యకు, మధ్యస్తమునకు నిర్ధిష్ఠమగు సూత్రము కలదు కావున ఏమని రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలు రాయుటకు ఉపయోగిస్తాము.

ఉదా:– $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ల మధ్య సంఖ్య $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+15}{20}}{2} = \frac{23}{40}$

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ల మధ్యస్తము $\frac{2+3}{5+4} = \frac{5}{9}$

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ అయినపుడు $\frac{a+mc}{b+md}$ (ఇచ్చుట m ఏదేని సంఖ్య)

మధ్యగల బిందువులను ఇచ్చును. m విలువ మారుస్తూ ఎన్నో మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలు రాయవచ్చు. $\frac{a}{b} < \frac{a+mc}{b+md} < \frac{c}{d}$ అని నిరూపించండి.

**F. ఫారే సంఖ్యలు :**

0 నుండి 1 వరకు అనగా నుండి వరకు గల సామాన్య భిన్నాలను క్రమం శ్రేణి $F_n$చే సూత్రము. ఆ భిన్నములలో దేని హారము కూడ 'n' కంటే ఎక్కువగా ఉండదు. వీటిని 'n'వ ఫారే శ్రేణి / భిన్నాలు (Farey seque±e / fractions) అంటారు.

ఉదా: $F_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

$F_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$

$F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$

$F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1$

$F_5$ మరియు $F_7$ ల సామాన్య భిన్నాల శ్రేణి రాయండి. (మధ్యస్తమును ఉపయోగించండి)

$F_n$ ను 'n' వ ఫారే భిన్నాలు అంటారు.

## G. అంత, ఆవృత, అనావృత, అనంత దశాంశ సంఖ్యలు :

$\frac{p}{10^n}$ రూపంలో గల భిన్నాలను దశాంశ భిన్నాలని అన్నాం.

(i) హారాన్ని గమనిస్తే హారము 2, 5 కారణాంకాలుగా గలది కావున హారము $2^m.5^n$ల రూపములో నున్న అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ ని అంతమగు దశాంశ సంఖ్యగా రాయవచ్చు.

$\frac{a}{b}$ లు $b = 2^m.5^n$ అయిన $m \geq n$ అయినపుడు

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^n.5^{m-n}} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^m} = \frac{a.5^{m-n}}{10^m}$$

$m - n \geq 0$ కావున $5^{m-n}$ పూర్ణసంఖ్య మరియు $a.5^{m-n} = c$

పూర్ణ సంఖ్యయే కావున $\frac{4}{b} = \frac{c}{10^m}$ అగును. ఇక 'c' ను రాసి 'm' విలువ కనుగుణ్యముగా దశాంశ బిందువు నుంచడమే తరువాయి.

ఉదా:- $\frac{17}{40} = \frac{17}{2^3.5} = \frac{17 \times 5^2}{2^3.5^3} = \frac{17 \times 25}{10^3}$ $\frac{425}{10^3} = 0.425$

ఇక
$$\begin{array}{l} 40)\ 17\ (0.425 \\ \quad\ \ 0 \\ \hline \quad\ 170 \\ \quad\ 160 \\ \hline \quad\quad 100 \\ \quad\quad\ 80 \\ \hline \quad\quad\ 200 \\ \quad\quad\ 200 \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

రెండు పద్ధతులను అనువర్తనము చేయుచు సోపానాలు రాయండి.

(ii) $\frac{a}{b}$ లు $b = 2^m5^n$ రూపంలో లేనిచో a ని 'b' తో భాగించినప్పుడు ప్రతి శేషము 0, 1, 2, . . . . $b-2$, $b-1$ లలో ఏదో ఒక సంఖ్య వచ్చును. కావున $a \div b$ భాగహారము ఒక సోపానములో వచ్చు శేష సంఖ్య తిరిగి తరువాత ఏదో ఒక సోపానములో వచ్చిన మధ్యలో వచ్చిన శేషములు మళ్ళి, మళ్ళి అదే క్రమములో ఆవృతమగును కావున హారము $2^m.5^n$ రూపములో లేని అకరణీయ సంఖ్య దశాంశ రూపము ఆవృతమవుతుంది.

ఇక 7) 10 ($1.\overline{428571}$

```
7) 10 (1.428571
   7
→  30
   28
    20
    14
     60
     56
      40
      35
       50
       40
        10
         7
→       30
```

'3' శేషము రెండవసారి వచ్చినది కావున అక్కడి నుండి శేషములు ఆవృత మగును. కావున దశాంశ సంఖ్యలు అవే అంకెలు అదే వరుసలో ఆవృత మవుతాయి.

**H.** కావున $\frac{a}{b}$ రూపంలోగల అకరణీయ సంఖ్యను అంతమగు దశాంశ సంఖ్యగా లేక, ఆవృతమగు అనంత దశాంశ సంఖ్యగా రాయవచ్చును. అదే విధంగా అంతమగు దశాంశ సంఖ్యను ఆవృతమగు అనంత దశాంశ సంఖ్యను సామాన్య భిన్నరూపము అనగా $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయవచ్చును.

### I. రెండు ఒకటే :

$$1 = 0.9999\ldots = 0.\overline{9}$$

$$0.1 = 0.999\ldots = 0.0\overline{9}$$

$$0.01 = 0.00999\ldots = 0.00\overline{9}$$

అని మనకు తెలుసు. కావున అంతమయ్యే ప్రతి దశాంశ సంఖ్యను ఆవర్తన అనంత దశాంశ సంఖ్యగా రాయవచ్చు.

అయితే క్రమబహుభుజి భుజాల సంఖ్య అనంతముగా పెంచుతూపోయిన వచ్చు ఆకారపు అవధి వృత్తమని తెలుసు. కాని భుజముల సంఖ్య ఎంత పెంచినను బహుభుజి వృత్తము కాదు. కావున 0.999.... లో $\overline{9}$లు అనంతముగా ఉన్నను అది 1 కి సమాన మెందుకవుతుంది? అని అనుమానము రావచ్చు. $0.\overline{9}$ మరియు 1లు వేరు వేరు అకరణీయ సంఖ్యలైన వాటి మధ్యలో వేరు అకరణీయ సంఖ్యలుండాలి (ఎందుకు?) అది వాటి సరాసరి కూడ కావచ్చు.

కావున 1, 0.9ల సరాసరి $= \frac{1 + 0.9999\ldots}{2} = \frac{1.999\ldots}{2} = 0.9999 = 0.\overline{9}$ తిరిగి $0.\overline{9}$ ఏ వచ్చినది. కావున 1, $0.\overline{9}$ ల మధ్య ఏ అకరణీయ సంఖ్య లేదు కావున $0.\overline{9} = 1$

### a. కరణీయ సంఖ్యలు :

పైథాగరస్ (580 BCE – 500 BCE) మరియు అతని అనుచరులు నూతన ఆవిష్కరణలకై రహస్య సంస్థను స్థాపించారు. వీరు ఎన్నో గణిత భావనలు కనుగొని తమలో తామే రహస్యంగా ఉంచుకొన్నారు. సంఖ్యలన్నీ అకరణీయ సంఖ్యలే అని

వారి భావన. సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజపు కర్ణపు కొలత భుజముతో పోల్చిన కరణీయ సంఖ్య అయినది. దీనిపై పిథగోరియన్‌లు తీవ్రంగా స్పందించేరు. దీనిని రహస్యంగా ఉంచాలనుకొన్నారు. బయటకు చెప్పిన వారిని నావలలో బంధించేరు. దీనిపై 5వ శతాబ్దంలో Elements పై వ్యాఖ్యానము రాసిన ప్రోక్లస్ "కరణీయ సంఖ్యల రహస్యాన్ని బయటకు పెట్టినవారు పడవ ప్రమాదాలలో చనిపోయారు. మిగిలిన వారెవరైన జనవాసము లేని ద్వీపము చేర్చి సముద్రపు అలల దెబ్బలు తినుటకు వదిలివేసేరు" అన్నాడు.

**b. వాస్తవ సంఖ్యలు :**

సంఖ్యారేఖపై గల బిందువులను సూచించు ప్రతి సంఖ్య వాస్తవ సంఖ్య అంటే సంఖ్యారేఖపై గల సంఖ్యలన్నియు వాస్తవ సంఖ్యలే.

**c.** ఒక్కసారి అకరణీయ సంఖ్యల నిర్వచనాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనండి "$\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయగలిగినది" ($a, b \notin z$ మరియు $b \neq 0$) "అంతము కాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా రాయగలిగినవి" (ప్రతి అంతమగు దశాంశ సంఖ్యను ఆవర్తన అనంత దశాంశ సంఖ్యగా రాయవచ్చు) అకరణీయ సంఖ్యలు అన్నాం. అకరణీయ సంఖ్య కాని సంఖ్యారేఖపై గల సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య. అనగా $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయలేని, ఆవృత అనంత దశాంశముగా రాయలేని సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య.

ఉదా: 1.01011011101111.........

5.245246247248...........

**d. వివిధ సంఖ్యామానములలో వాస్తవ సంఖ్య :**

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అనగా 142857 అంకెల గుంపు అదే క్రమములో ఆవృత మగును. కాని దీనిని దశాంశ మానములో నుండి సప్తాంశ మానములోని మారిస్తే $\frac{1}{7}_{(10)} = 0.1_{(7)}$ అంతమగు సప్తాంశ సంఖ్య అవుతుంది. అంటే ఒక అకరణీయ సంఖ్యను వేరొక సంఖ్యామానంలో రాస్తే ఆవర్తన సంఖ్య, అంతమగు సంఖ్యగా కావచ్చు కాని కరణీయ సంఖ్య ఏ సంఖ్యా మానములో రాసినను అది కరణీయంగానే ఉండి ఆవర్తన లేదా అంతమగు సంఖ్యగా మారదు.

$\sqrt{2} = 1.4142135623731$............ దశాంశ సంఖ్యామానము

$= 1.0110101000001001110$........ సంఖ్యామానంలో

$\sqrt{2}$ ఏ రూపంలో రాసినను ఆవర్తన / అంతమగు సంఖ్యగా మారుటలేదు.

**e. సమ్మేళనము :**

$\sqrt{2} + 3$ కరణీయ సంఖ్యా? లేక అకరణీయ సంఖ్యయా?

$\sqrt{2} + 3 = a$ అకరణీయ సంఖ్య అనుకొనిన

$\sqrt{2} = a - 3$ $a - 3$ అకరణీయ సంఖ్య (ఎందుకు?)

కాని $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య. కావున $\sqrt{2} + 3$ కరణీయ సంఖ్య.

a కరణీయ సంఖ్య మరియు 'b' అకరణీయ సంఖ్య అయిన $a + b$, $a - b$ లు కరణీయ సంఖ్యలే అని చూపండి.

$3\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్యయా? అకరణీయ సంఖ్యయా?

$3\sqrt{2} = x$ అకరణీయ సంఖ్య అనుకొనిన

$\sqrt{2} = \frac{x}{3}$ ($\frac{x}{3}$ అకరణీయ సంఖ్య ఎందుకు?)

కాని $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య. కావున $3\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్యయే.

> a, b లు వరసగా కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యలైన a.b, $\frac{a}{b}$ లు కరణీయ సంఖ్యలే అని నిరూపించండి.

**f.** $(\sqrt{a})^2 = a$

$(\sqrt{a})^3 = a\sqrt{a}$ కావున కరణీయ సంఖ్య యొక్క ఘాతము అకరణీయ సంఖ్య ఐన అది కరణీయ లేక అకరణీయ సంఖ్య ఏదైన కావచ్చు.

**g. ఎలా?**

$2^{\sqrt{2}}$ కరణీయ సంఖ్య మరియు $(\sqrt{2})^2$ = అకరణీయ సంఖ్య

కాని $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ అకరణీయ సంఖ్య.

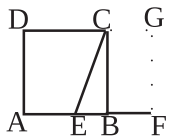
కరణీయ సంఖ్య యొక్క ఘాత సంఖ్య కరణీయ లేక అకరణీయ సంఖ్య అయిన ఆ సంఖ్య కరణీయ లేక అకరణీయ సంఖ్య ఏదైన కావచ్చు కాని

$\pi^{\pi}, 2^{\pi}, \pi^{\sqrt{2}}$ లను చూస్తే కరణీయ సంఖ్యలుగానే కనిపిస్తున్నాయి. కాని ఎలా నిరూపించాలో ఇంతవరకు కనుగొనబడలేదు.

**h. అలసటలేని :**

ఫిబోనాకి సంఖ్యలను గూర్చి చెప్పినపుడు వానిలోని రెండు వరుస సంఖ్యల నిష్పత్తుల అవధి 1.6 దగ్గరగా ఉంటుందని దానిని స్వర్ణ నిష్పత్తి అంటాం అని చర్చించాము. దీర్ఘచతురస్రాకారపు వస్తువుల పొడవు వెడల్పుల స్వర్ణ నిష్పత్తిలో ఉంటే అది కంటికి ఇంపుగా వుండునని దీనిని ఆధారముగా తీసుకొని చిత్రకారులు చిత్తర్వులు, ఇంజనీర్లు కట్టడములకు ప్లాన్లు వేస్తారని నిష్పత్తి అధ్యాయంలో చెప్పబడింది. అయితే ఆ స్వర్ణ దీర్ఘ చతురస్రము (Golden rectangle) ఎలా నిర్మిస్తారు?

కావలసిన దీర్ఘచతురస్రపు వెడల్పు కొలతతో ABCD చతుర్భుజాన్ని నిర్మించుము. E, AB యొక్క మధ్యబిందువు గుర్తించుము EC = EF అగునట్లు AB పై F బిందువు గుర్తించుము AF పై AFGD దీర్ఘచతురస్రాన్ని నిర్మించండి.




ఇప్పుడు మనకు కావలసిన స్వర్ణ (Golden) దీర్ఘచతురస్రము AFGD వచ్చును.

EB = 1 తీసుకొని $\frac{AF}{AB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ అని చూపండి దీనినే $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ గా రాస్తారు. ఆ విలువను మూడు దశాంశ స్థానముల వరకు కనుగొనండి. ఆ విలువ కరణీయ సంఖ్య.

**i.** పై పటములో AFGD స్వర్ణ దీర్ఘచతురస్రము నుండి ABCD చతురస్రాన్ని వేరుచేసిన మిగిలి BFGC దీర్ఘచతురస్రము కూడ స్వర్ణ దీర్ఘచతురస్రమే. ఈ విధంగా స్వర్ణ దీర్ఘచతురస్రములలో చతురస్ర భాగాలను తొలగించిన మిగులు దీర్ఘచతురస్ర భాగాలు స్వర్ణ దీర్ఘచతుస్రాలే.

ఈ ప్రక్రియ అనంతముగా కొనసాగిన స్వర్ణ దీర్ఘచతురస్రాలే వస్తాయి. కావున వీటిని Dynamic rectangle (అలసటలేని దీర్ఘ చతురస్రాలు) అంటారు.

**j. కాగితపు సైజులు :**

మనము ఇంకొక సందర్భములో కూడ అలసటలేని దీర్ఘచతురస్రాలు ఏర్పడుట గమనిస్తాము.

కంప్యూటరు ప్రింటరులో ఉపయోగించి కాగితమును $A_4$ సైజు కాగితము అంటాం. ఎందుకో తెలుసా?

పొడవు వెడల్పుల నిష్పత్తి $\sqrt{2}$ గా గల్గి 1 చదరపు మీటరు వైశాల్యము గల కాగితమును $A_0$ సైజుకాగితము అంటారు. దీనిని పొడవు మధ్యబిందువు నుండి సగానికి మడచిన వచ్చు కాగితమును $A_1$ సైజు కాగితము అంటారు. దానిని తిరిగి మడచిన

$A_2$ అలాగే $A_3$, $A_4$ ... సైజుకాగితాలు వస్తాయి. వాటి పొడవు వెడల్పుల నిష్పత్తులన్నియు $\sqrt{2}$ (కరణీయ సంఖ్య)గానే ఉండును. కావున వచ్చునవన్నియు అలసటలేని దీర్ఘచతురస్రాలే.

పై రెండు సందర్భాలలోను అలసటలేని ఆకారాలు వచ్చుటకు వాటి కొలతల నిష్పత్తులు కరణీయ సంఖ్యలుగా ఉండుట గమనించండి.

మీరు కరణీయ సంఖ్యల ఉపయోగము ఇంక ఎక్కడైన చూసారా? చర్చించండి.

## k. పక్కన ఖాళీలేదు ఇరుగుపొరుగు లేరా? :

వాస్తవ సంఖ్యా రేఖపై కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యలు కలవు. అవి ఎంత దట్టంగా ఉన్నాయంటే వాటిమధ్య ఖాళీస్థలం లేదు. అంటే సంఖ్యారేఖపై ఖాళీ స్థలాలు లేకుండ వాస్తవ సంఖ్యలు ఆక్రమించుకొని ఉన్నాయనవచ్చు. ఒక సంఖ్యకు ఇరువైపుల వాస్తవసంఖ్యలు కలవు కాని దానికి ఇరుగు, పొరుగు సంఖ్యలు లేవు. అంటే ఒక దానికి ఆనుకొని ఉన్న సంఖ్య ఏదో చెప్పలేము ఎందుకు? చర్చిచండి.

## l. సంభావ్యత :

చర్చనీయాంశాలలో చివరది. సంఖ్యారేఖపై అనంతమైన కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించే బిందువులున్నాలు. అనాలోచితంగా ఒక పెన్సిల్ మొనను సంఖ్యారేఖపై ఉంచిన బిందువు అది కరణీయ బిందువా? లేక అకరణీయ బిందువా? దేని సంభావ్యత ఎక్కువ? ఈ ప్రశ్నకు జవాబు క్లిష్టము.

అయితే ఈ కింద పేర్కొనిన ప్రయోగము దానికి జవాబును సూచిస్తుంది.

10 ముఖములుగల ఒక పాచికను తీసుకొనండి. దాని ముఖంపై వరుసగా 0, 1, 2, . . . 9 వరకు అంకెలు రాయండి. పాచికను విసరి వచ్చు అంకెను దశాంశబిందువు తరువాత రాయండి. రెండవసారి పాచిక విసరి వచ్చు సంఖ్యను రెండవ దశాంశ స్థానంలో రాయండి. ఇలా రాస్తూ పోతే వచ్చు సంఖ్య కరణీయమా? అకరణీయమా? ఆలోచించండి. (కరణీయ సంఖ్యయే ఎందుకనగా పాచికలు విసరినప్పుడు వచ్చు సంఖ్యల ఆవర్తన గుంపుఉండును).

భారతదేశంలో 'కళలు' మరియు 'రంగోళీ' సాంప్రదాయాలు కేవలం చూడటానికి బావుండటం మాత్రమే కాదు. అందులో ఒక గణిత విద్యార్థి నేర్చుకోవడానికి అవసరమైన ఎంతో జ్ఞానం ఇమిడి ఉంది.

– SCF 2011

# ఆ) బీజగణితం - అభ్యసన ఆధార పత్రం

## (Approach paper on Algebra)

**ప్రాముఖ్యత :**

**1. క్యాలెండర్ :**

| ఆది | సోమ | మంగళ | బుధ | గురు | శుక్ర | శని |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | | |

- పై క్యాలెండర్‌లో ఏదైనా ఒక 3 × 3 చతురస్రాన్ని తీసుకొని వానిలోని అంకెల / సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.
- అదే 3 × 3 చదరంలో అతిచిన్న సంఖ్యను తీసుకొనండి.
- ఆ చిన్న సంఖ్యకు 8ని కలిపి మొత్తాన్ని 9 చే గుణించండి.
- పై రెండు పద్ధతులలోని ఫలితాన్ని సరిచూడండి.
- బీజగణితం సహాయంతో దీనిని వివరించగలరా?

**2. పైథాగొరియన్ ట్రిపుల్స్ :**

- రెండు వరుస సరి సంఖ్యలను తీసుకొనండి.

  ఉదా : 2, 4
- వాని వ్యుత్క్రమాల మొత్తమును కనుగొనండి.

  ఉదా : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- వచ్చిన భిన్నములో లవము, హారము, (హారము + 1) లను తీసుకొనండి. ఉదా: 3, 4, (4 + 1) = 3, 4, 5.
- ఇవి పైథాగొరియన్ ట్రిపుల్స్ అవుతాయేమో పరిశీలించుము.
- ఏ రెండు వరుస సరిసంఖ్యలను తీసుకొన్నా ఇదే ఫలితమును పొందగలమేమో సరిచూడండి.
- ఇలా సరిచూచుటలో గణితములోని ఏ విభాగాన్ని ఉపయోగిస్తాం?

**3. వింత చదరాలు :**

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

3 × 3 వింత చదరం

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 14 | 15 | 1 |
| 9 | 7 | 6 | 12 |
| 5 | 11 | 10 | 8 |
| 16 | 2 | 3 | 13 |

4 × 4 వింత చదరం

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

5 × 5 వింత చదరం

పైన 3 × 3, 4 × 4, 5 × 5 వింత చదరాలు ఇవ్వబడినవి. వీనిలో మొదటి సహజ సంఖ్యలను నింపినప్పుడు అనగా 3 × 3 వింత చదరంలో 1 నుండి 9 వరకూ, 4 × 4 లో 1 నుంచి 16 వరకూ; 5 × 5 లో 1 నుంచి 25 వరకూ అంకె / సంఖ్యలను నింపినపుడు వాని స్థిరాంకం (ఏదైనా నిలువు / అడ్డు వరుసలలో అంకె / సంఖ్యల మొత్తము) ఈ కింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది.

| వింత చదరం యొక్క పరిమాణం | 3 × 3 | 4 × 4 | 5 × 5 |
|---|---|---|---|
| స్థిరాంకం | 15 | 34 | 65 |

పై పట్టిక నుంచి 6 × 6 వింత చదరం యొక్క స్థిరాంకం ఎంతో ఊహించగలరా?

పై పట్టికను మరికొంత వివరణాత్మకంగా చూద్దాం.

| వింత చదరం యొక్క పరిమాణం | 3 × 3 | 4 × 4 | 5 × 5 |
|---|---|---|---|
| స్థిరాంకం | $15 = 3 \times 5 = \frac{3 \times 10}{2} = \frac{3(3^2+1)}{2}$ | $34 = \frac{4 \times 17}{2} = \frac{4(4^2+1)}{2}$ | $65 = 5 \times 13 = \frac{5 \times 26}{2} = \frac{5(5^2+1)}{2}$ |

ఈ అమరికలోని నియమాలు మీకీపాటికి అర్థమయ్యే వుంటుంది. ఈ నియమం ప్రకారం 6 × 6 వింత చదరం యొక్క స్థిరాంకము = $\frac{6(6^2+1)}{2}$ = 111 అవుతుంది. అయితే ఈ అమరికలోని నియమాన్ని బీజగణితం సహాయంతో సాధారణీకరించగలరా? సరిచూడగలరా?

4. నిరూపించండి :

- ఒక నాలుగు అంకెల సంఖ్య, అందులోని అంకెలను తారుమారు (రివర్సు) చేయగా వచ్చే సంఖ్యల మొత్తము 11చే భాగించబడుతుంది.
- నాలుగు వరుస సంఖ్యలను వరుస క్రమములో తీసుకున్న అంత్య సంఖ్యల లబ్ధము, మధ్య సంఖ్యల లబ్ధముల తేడా ఎల్లప్పుడూ రెండే.
- రెండు వరుస సంఖ్యల మొత్తము ఎల్లప్పుడూ బేసి సంఖ్యయే.
- ✦ వీని నిరూపణలో మీరు ఉపయోగించిన గణిత శాస్త్ర విభాగమేది?

తదుపరి మీరు ఈ కింది విషయాలతో ఏకీభవిస్తారా?

1) సమస్యలు / పజిల్స్ మొదలైన వానిని సాధించుటలో ఉపయోగపడే అత్యంత శక్తివంతమైన గణిత విభాగం – బీజగణితం.
2) నియమాలను సరిచూచుటలో బీజగణితం తోడ్పడుతుంది.
3) నియమాలను సామాన్యీకరించటంలో బీజగణితం తోడ్పడుతుంది.
4) అమరికలను సామాన్యీకరించుటలో బీజగణితం ఉపయోగపడుతుంది.
5) తెలియని రాశి / విలువను కనుగొనుటలో బీజగణితం ఉపయోగపడుతుంది.

ఈ విధంగా బీజగణిత సామర్థ్యము పజిల్స్ సాధనలో, సామాన్యీకరించటంలో నిజ జీవిత సమస్యల సాధనలో ఉపయోగపడటమే కాకుండా గణితశాస్త్ర పురోభివృద్ధికి ఉపయోగపడుతుంది.

బీజగణితమును నేర్చుకోకపోతే రసాయన శాస్త్రము, భౌతిక శాస్త్రము, భౌగోళిక శాస్త్రము, అర్థ శాస్త్రము, వ్యాపారము మరియు మానసిక శాస్త్రాలలో చాలా విషయాలను మనం అర్థం చేసుకోజాలము. బీజగణిత జ్ఞానలేమి ఈ శాస్త్రాలలో మన అవకాశాలను పరిమితం చేస్తుంది. వాస్తవానికి బీజగణితం లేకపోతే ఈ శాస్త్రాలలోని చాలా విషయాలను ఇప్పుడు మనం చేస్తున్నంత సులభంగా చేయటం వీలు అయ్యేది కాదు. కొన్ని ఫలితాలను అయితే అసలు పొందే వీలు ఉండేది కాదు.

ఏదైనా ఒక విషయాన్ని ఒకేసారి వివరించవలసి వచ్చినప్పుడు బీజగణిత అవసరం లేకపోవచ్చు. కానీ అదే విషయాన్ని తిరిగి తిరిగి వివరించవలసి వచ్చినప్పుడు బీజగణితం తప్పనిసరి. బీజగణితం అలాంటి వానిని సులభంగా వివరించుటకు ఉపయోగపడే గణితభాష. ఉదాహరణకి రెండు భిన్నాల లబ్దమును కనుగొనే విషయమును వివరించవలసి వస్తే దానిని కింది విధంగా రాయవలసి వస్తుంది.

> "మొదటి భిన్నములోని లవమును రెండవ భిన్నములోని లవముతో మొదట భిన్నంలోని హారమును, రెండవ భిన్నములోని హారముతో గుణించి ఫలితాలను వరుసగా లవ, హారాలుగా రాయవలెను."

దీనినే బీజగణితమును ఉపయోగించి అత్యంత్య సులువుగా, అందరికీ అర్థమయ్యే రీతిలో ఈ కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

ఈ విధంగా బీజ గణితం యొక్క ఉపయోగాన్ని వివరించగలిగితే విద్యార్థులు దీనిని నేర్చుకోవడానికి ప్రేరణ పొందుతారు.

**కొన్ని బీజగణిత అంశాలు – వినియోగం :**

**1) ఫార్ములాలు :** ఒక సందర్భములో చికాగో నగరంలోని ఒక వార్తాపేపర్‌లో క్రీడా కాలమ్‌లో ఈ విధంగా పేర్కొన్నారు.

"పోటీలు ఇంకొక 3 వారాలలో ప్రారంభించబడుతాయి. అయినప్పటికీ శుక్రవారం రాత్రి జరిగే సన్నాహక పోటీ – హైస్కూల్ స్థాయిలో ఫార్ములాలు నేర్చుకోవడం అంత ముఖ్యమైనది – కనుక తప్పక వీక్షించండి."

దీనిని బట్టి ఫార్ములాలు ఎంత ముఖ్యమైనవో మనం అర్థం చేసుకోవచ్చు. ఇంకా క్రీడా సంబంధ గణాంకాలలో, విషయాలలో ఫార్ములాల వినియోగం ఎంత అవసరమో ఈ వార్తా రచయితకు విధితమే అని కూడా మనం భావించవచ్చు. వాస్తవానికి క్రీడా సంబంధ అంశాలన్నీ ఫార్ములాలతోనే ముడిపడి ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు ఒక క్రీడాకారునికి $\in_1$ గేములలో మొత్తం T పాయింట్లు వస్తే అతని సగటు స్కోరు $A = \frac{\in_1}{T}$. అదే విధంగా ఒక క్రీడా కారుని గరిష్ఠ, కనిష్ఠ స్కోరుల ఆధారంగా అతని వ్యక్తిగత సామర్థ్యమును అంచనావేయవచ్చు. ఇంకా ఒక టీము యొక్క గెలుపు శాతమును $\frac{W}{W+L}$ ఆధారముగా లెక్కించవచ్చు. ఇచ్చట W = గెలుపుల సంఖ్య మరియు L = ఓటముల సంఖ్య.

అదే విధంగా మనం నివసించే ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యం తెలుసుకొనుటకు, మన చొక్కాకు ఎంత పరిమాణంగల గుడ్డ అవసరమో తెలుసుకొనుటకు, మనం నివసించే ఇంటి చుట్టూ కంచె వేయవలెనన్న ఎంత పొడవున్న కంచె అవసరమో తెలుసుకొనుటకు, మనం మిత్రులకు ఇచ్చే గిఫ్టలను అందంగా ప్యాక్ చేయడానికి ఎంత పొడవైన రిబ్బను అవసరమో తెలుసుకొనుటకు ఇంకా రిబేటు, రుసుము, అమ్మకపు పన్ను, ఆదాయపు పన్ను వంటి ఆర్థిక విషయాలలోనూ మనం అనునిత్యం ఈ ఫార్ములాలను వాడుతూ ఉంటాము. వీటన్నింటిని మనం చాలా చిన్న చిన్న ఫార్ములాలను ఉపయోగించి సులభంగా కనుగొనగలుగుతాం. అయితే అన్ని ఫార్ములాలు ఇదే విధంగా సులభమైనవిగా ఉండకపోవచ్చు. ఉదాహరణకి ఏ తేదీ ఏ వారం అవుతుందో కనుగొనుటకు ఈ కింది ఫార్ములాను ఉపయోగిస్తాము.

$$W = d + 2m + \left[\frac{3(m+1)}{5}\right] + y + \left[\frac{y}{4}\right] - \left[\frac{y}{100}\right] + \left[\frac{y}{400}\right] + 2$$

ఇచ్చట $d$ = తేదీలోని రోజు (day)

$m$ = తేదీలోని నెల

$y$ = తేదీలోని సంవత్సరము

అయితే నెల (m) ను తీసుకొనప్పుడు జనవరి 13 గా, ఫిబ్రవరిని 14గా మిగిలిన నెలలను యథావిధిగా అనగా మార్చిని 3గా, ఏప్రిల్‌ను 4గా . . . . డిసెంబర్‌ను 12గా తీసుకోవలెను. మరియు [ ] అనగా విలువలోని పూర్ణాంక భాగమునే తీసుకోవాలని అర్థం.

అనగా [5.2] = 5; [14.75] = 14 అని అర్థం.

'W' ను గణించిన తరువాత ఫలితంను 7చే భాగించి వచ్చిన శేషము ఆధారంగా వారమును లెక్కిస్తాము. శేషము '0' అయిన శనివారము, '1' అయిన ఆదివారము........ '6' అయిన శుక్రవారము.

అదే విధంగా A సొమ్మును, r రేటు ప్రకారం, m నెలలకు అప్పుగా తెచ్చుకున్నప్పుడు తిరిగి నెలనెలకు చెల్లించవలసిన సొమ్ము P ని కింది ఫార్ములా నుంచి కనుగొనవచ్చు.

$$P = A\,x^m \left(\frac{x-1}{x^m-1}\right)$$

ఇచ్చట $x = 1 + \frac{r}{1200}$

ఈ ఫార్ములా ప్రకారం ₹ 8,500/– లను 11.25% వడ్డీరేటు ప్రకారం 4 సం॥లకు అప్పుగా తెచ్చుకున్న నెలకు చెల్లించవలసిన సొమ్ము ₹ 220.72.

**2) ప్రమేయాలు :**

ఆరోగ్యమును ప్రభావితం చేసే వివిధ అంశాలు వయస్సుతోపాటు ఎలా మారుతాయి? బరువుతో పాటు ఎలా మారుతాయి? ఒక కుటుంబం ఖర్చు చేసే విధానంలోని మార్పు వారి బడ్జెట్‌ను ఎలా ప్రభావితం చేస్తుంది? జనాభా పెరుగుదల వివిధ శక్తి వనరుల వినియోగంపై ఎలాంటి ప్రభావాన్ని చూపిస్తుంది. మొదలైనవన్నీ ప్రమేయాలకు ఉదాహరణలు. బీజగణితమును ఉపయోగించకుండా పెద్దపెద్ద పట్టికల ద్వారా గ్రాఫ్‌ల ద్వారా వీనిని వివరించవచ్చు. అయితే బీజగణితాన్ని ఉపయోగించినప్పుడు మనం పొందే స్పష్టత, సరళత పట్టికల ద్వారా గ్రాఫ్‌ల ద్వారా పొందలేము. ఇంకా బీజగణితము ఆధారంగా ఇవి ఎప్పుడు అత్యల్ప విలువను, అత్యధిక విలువను కలిగి ఉంటాయో కూడా చెప్పవచ్చు. ఇవన్నీ కలన గణితానికి ఆధారాలు.

**3) రేఖీయ సమీకరణాలు :**

ఒక స్థిర రేటులో మార్పుకు లోనయ్యే ఏ అంశమైనా ఒక రేఖీయ సమీకరణం $T = Ax + by$ ని సూచిస్తుంది. ఇలాంటి సమీకరణాల ఆధారంగా నిజ జీవితంలోని అనేక సమస్యలను ఎలా సాధించవచ్చో 8వ తరగతి నూతన గణిత పాఠ్య గ్రంథంలో ఇవ్వబడినవి. అదే విధంగా ఒక కారు / ఆటోను అద్దెకు తీసుకున్నప్పుడు చెల్లించవలసిన మొత్తము, లైబ్రరీ నుంచి ఒక పుస్తకమును అద్దెకు తెచ్చుకున్నప్పుడు చెల్లించవలసిన మొత్తము మొదలైన వానిని ఎలా కనుగొంటామో 9వ తరగతి నూతన పాఠ్య గ్రంథములో ఇవ్వబడింది.

**4) వాలు (Slope) :**

మార్పు చెందుతున్న ఏ అంశానికైనా ఒక మార్పు రేటు ఉంటుంది. ఒక్కొక్కసారి ఈ మార్పు రేటు అత్యంత్య ప్రాధాన్యతగల అంశమౌతుంది. కారు వేగంలోని మార్పురేటు దాని త్వరణాన్ని ప్రభావితం చేస్తుంది. ఆదాయంలోని మార్పు రేటు మన ఫైనాన్సియల్ స్టేటస్‌ను మార్చగలదు. నిరుద్యోగంలోని మార్పు రేటు ద్రవ్యోల్బణంను ప్రభావితం చేయగలదు. వీటన్నింటి వెనుక గల బీజగణిత అంశం "వాలుతనము".

**5) ఘాతాంకాలు :**

ఒక సంఘటన యొక్క సాధ్యాసాధ్యాలను అంచనావేయుట కొరకు తయారుచేయబడిన గణితశాస్త్ర విభాగమే సంభావ్యత. ప్రస్తుతం ఈ గణిత విభాగంలో ఘాతాంకాలను వినియోగిస్తున్నారు. ఏదైనా ఒక అంశం నిరంతరాయంగా స్థిర రేటులో పెరుగుతూ ఉంటే ఆ పెరుగుదలను ఘాతాంక పెరుగుదల (Expenential Growth) అంటాం. ఇలాంటి పెరుగుదలను మనం మన నిత్య జీవితంలోని అనేక ద్రవ్య సంబంధ విషయాలలో చూస్తూ ఉంటాం. చక్రవడ్డీ, వాహనాల మోర్టేజ్, క్రెడిట్ కార్డుల చెల్లింపులు, జీవిత భీమ పాలసీల చెల్లింపులు, రిటైర్‌మెంట్ సమయంలో ఇచ్చే మొత్తాలు ఈ కోవకు చెందినవే. ఇంకా జనాభా పెరుగుదల, జంతువుల పెరుగుదల / తరుగుదల మొదలైనవన్నీ కూడా ఈ కోవకు చెందినవే.

**6) బీజీయ సమాసాలు :**

గురుత్వాకర్షణ శక్తికి లోబడి ప్రయోగించే ఏ వస్తువు మార్గమునైనా $Ax^2 + Bxy + cy^2 + Dx + Ey + F$ అనే బీజీయ సమాసం వర్ణించగలుగుతుందని న్యూటన్ కనుగొనినాడు ఇదే ఫలితం నక్షత్రాలకు, గ్రహాలకు, తోకచుక్కలకు, చందమామలకు వర్తిస్తుంది. అదే విధంగా ఇదే ఫలితం రాకెట్లకు, బుల్లెట్లకు, బేస్‌బాల్స్, బాస్కెట్ బాల్స్ యొక్క మార్గాలకు వర్తిస్తుందని మనం గుర్తించగలం. అంటే ఈ ఫలితమును భౌతిక శాస్త్రం, ఖగోళ శాస్త్రం, సైనిక సేవలలో, క్రీడలలో ఉపయోగిస్తాం.

**7) సంవర్గమానాలు :**

భూకంప తీవ్రతను కొలవడానికి ఉపయోగించే రిక్టర్ స్కేల్, ఆమ్లత్వమును లెక్కించడానికి ఉపయోగించే Ph స్కేలులో, ఖగోళ శాస్త్రంలో ఉపయోగించే నక్షత్ర పరిమాణ స్కేలులో ఈ సంవర్గమానాలను ఉపయోగిస్తారు.

**8) ప్రస్తారాలు – సంయోగాలు :**

లాటరీలలో గెలుపు, ఓటములను అంచనావేయుటకు, ఓపీనియన్ పోల్స్ నిర్వహించుటకు అవసరమయ్యే ఓటర్ల సంఖ్యను నిర్ధారించుటకు, టి.వి. రేటింగ్స్‌ను అంచనా వేయుటలో వీనిని ఉపయోగిస్తారు.

ఈ విధంగా బీజగణితం అత్యంత్య ప్రాముఖ్యమైనది. మనం ఏదైనా ఒక ప్రాంత సందర్శనకు వెళ్లినప్పుడు ఆ ప్రాంత ప్రజలు మాట్లాడే భాష రాకపోయినా ఏదో ఒక విధంగా మూగసైగలతోనైనా మన పని పూర్తిచేసుకొని రాగలం. కానీ దీనివల్ల వారి సామాజిక, ఆర్థిక, రాజకీయ స్థితిగతులను, వారి పూర్వ తరాల వైభవమును వారి సంస్కృతిని అర్థం చేసుకోలేం. మన స్ఫూర్తిగా అభినందించలేం. ఇంకా విచిత్రం ఏమిటంటే ఆ పర్యటనలో మనం ఏం చూడలేకపోయినామో, ఏమి కోల్పోయామో కూడా గుర్తించలేం. అదే విధంగా బీజగణితం లేకుండా కూడా గణితాన్ని నేర్చుకోవచ్చు. అయితే గణితం యొక్క సౌందర్యాన్ని దర్శించలేము దాని ఆవశ్యకతను, ప్రాముఖ్యతను గుర్తించలేము, అభినందించలేము.

## చరిత్ర :

సాధారణంగా కింది తరగతులలో బోధించే అంకగణితము సులభమైనదిగా, పై తరగుతలలో బోధించే బీజగణితము కష్టమైనదిగా భావిస్తాము. అంకగణితము సుపరిచితమైన అంకెలు / సంఖ్యల వంటి గుర్తులను ఉపయోగించుటము బీజగణితము అంతగా సుపరిచితం కాని x, y . . . . . ల వంటి గుర్తులను ఉపయోగించటమే ఇలా భావించడానికి కారణం కావచ్చు. అయితే ప్రయోగాత్మకంగా పరిశీలించినప్పుడు అంకెలు / సంఖ్యల వంటి గుర్తులను ఉపయోగించుటకు, x, y . . . . . వంటి గుర్తులను ఉపయోగించుటకు మధ్య తేడా ఏమీ లేదు.

నాగరికత అభివృద్ధి చెందుతున్న మొదటి రోజులలో “నీ వద్ద ఆరు పండ్లు కలవు. నేను అదేరకమైన పండ్లు మరి ఐదింటిని ఇస్తే మొత్తం నీ దగ్గర పండ్లు ఎన్ని?” – అని వుండేది. దీనికి సమాధానం పదకొండు పండ్లు అని మనకు తెలుసు. అనగా

ఆరు పండ్లు + ఐదు పండ్లు = పదకొండు పండ్లు

అయితే సంఖ్యలు మరీ పెద్దవి అయినప్పుడు ఈ విధంగా రాయటం శ్రమతో కూడుకున్నదే గాక కాలం వృథా అవుతుంది. దీనికి పరిష్కారంగా అభివృద్ధి చేయబడినవే 0, 1, 2 . . . . . 9. వీనినే సంఖ్యా సంజ్ఞలు (Numerals) అంటాం. 9 కంటే ఎక్కువైన సంఖ్యలను ఈ సంజ్ఞలను ఉపయోగించి రాయడం ఎలానో మనం నేర్చుకున్నాం. దీనివల్ల "ఆరువేల ఏడు వందల యాభై రెండు" అనే పెద్ద వాక్యమును అతి సూక్ష్మంగా 6752 అని రాయటం వీలైంది.

గుర్తులు, సంజ్ఞల యొక్క ఉపయోగం ఈ పాటికి మీకు అర్థమయ్యే ఉంటుంది. వాస్తవంగా ఇలాంటి సంఖ్యలు / గుర్తులను మనము వాడుతున్నవే. "గుర్రం" అనే పదం భూమి మీద వున్న ఒక జీవిని సూచించుటకు మనం వాడే సంజ్ఞ / గుర్తు. ఈ విధంగా మనం నిజ జీవితంలో ప్రతీ విషయాన్ని సులభంగా వివరించుటకు అనేకరకమైన సంఖ్యలు / గుర్తులను వాడుతాం. అయితే వీటన్నింటిని మనం కింది తరగతులలోనే నేర్చుకోవటం వల్ల వానిపై తగినంత తర్ఫీదు పొందడంవల్ల అవి సులభమైనవిగా భావిస్తాం. అదే పై తరగతులలో క్రొత్త సంజ్ఞలు / గుర్తులు ఉపయోగించవలసివస్తే అవి క్రొత్తగా అసహజంగా కనిపిస్తుంది. ఉపయోగించడానికి అంత త్వరగా ఇష్టపడము. అయితే ఇదే విధమైన అఇష్టము, అసహజత్వము అంకగణితములో 0, 1, 2 . . . . . . . . 9, +, –, ×, ÷, = వంటి గుర్తులను నేర్చుకొనే సమయంలో కూడా వుంటుందని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. కాకపోతే వానిపై తర్ఫీదు ఉండటంవల్ల వానిని సులభమైనవిగా భావిస్తున్నాం. ఏదిఏమైనా సంఖ్యలు జీవన గమనాన్ని సులభతరం చేస్తాయనేది నిర్వివాదాంశం. అయితే ఈ క్రమంలో ఒక్కొక్కసారి క్రొత్త సంజ్ఞలు / గుర్తులను కనుగొనవలసిన అవసరం ఏర్పడుతుంది.

ఈ కింది ప్రశ్నలను పరిశీలించుము.

1) రెండుకు రెండు కలిపిన మొత్తం ఎంత?

2) ఎనిమిది నుంచి ఐదును తీసివేసిన ఫలితం ఎంత?

ఈ రెండింటిని సంజ్ఞలు / గుర్తులను ఉపయోగించి ఇలా రాయవచ్చు.

1) 2 + 2 =

2) 8 – 5 =

అయితే ఇలా సంజ్ఞా రూపంలోకి మార్చినప్పుడు ఒకటవ ప్రశ్నలలోని మొత్తం ఎంత? రెండవ ప్రశ్నలలోని ఫలితం ఎంత? అనే వానికి సంజ్ఞలేకపోవడం వల్ల రాయలేకపోయినాము. అంటే మనకు (కొత్త సభ్యులు) గుర్తులు అవసరం. అయితే ఇక్కడ సంజ్ఞ రాయవలసిన అవసరం ఏముంది ఆ ప్రదేశంలో కొంత ఖాళీ స్థలమును వదిలితే సరిపోతుంది కదా అని మనం భావించవచ్చు. కానీ ఈ కింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

ఎన్ని మామిడి పండ్లకు ఆరు మామిడి పండ్లు కలిపితే అవి పదకొండు అవుతాయి? అంటే మొదటవున్న మామిడి పండ్ల సంఖ్య మనకు తెలియదు. ఇది తెలియని రాశి / అవ్యక్తరాశి. దీనికి ఖాళీ స్థలమును వదలి పై విషయాన్ని కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$6 = 10 \rightarrow (1)$$

ఇది అర్థవంతంగా వున్నట్లు అనిపించదు. అంటే తెలియని రాశికి ఖాళీ స్థలం వదలటం అంత శ్రేయస్కరం కాదు. 'ఆరుకు' '6'; 'పది' కి '10' ఏ విధంగా అయితే గుర్తులు ఉన్నాయో అదే విధంగా తెలియని రాశికి కూడా ఒక గుర్తు / సంజ్ఞ ఉండడం అవసరం.

తెలియని రాశికి ఒక గుర్తు / సంజ్ఞ యొక్క అవసరం మీకీపాటికి అర్థమై ఉంటుంది. తెలియని రాశికి ఒక సంజ్ఞ / గుర్తుకు మనం సూచించాలని భావిస్తున్నామంటే మనం బీజగణితమును గురించి ఆలోచిస్తున్నామనే అర్థము. తెలియని రాశికి ఒక సంజ్ఞ తయారైన మరుక్షణం మనం అంకగణితంలోని ప్రతీ సమస్యలో తెలియని రాశికి ఆ సంజ్ఞను వాడుతాము. అందువల్లనే సాధారణీకరించబడిన అంకగణితమునే బీజగణితం అంటాం. ఇక ఇప్పుడు మన సమస్య ఏమిటంటే ఈ తెలియని రాశికి ఒక

సంజ్ఞ / గుర్తును కనుగొనడం దీని కొరకు అనేక గుర్తులను పరిశీలించడం జరిగింది. ఈ పరిశీలనలో ముఖ్యంగా గుర్తుంచుకున్న అంశాలేమిటంటే ఈ (కొత్త సంజ్ఞ) గుర్తు అందరికీ తెలిసినదై ఉండాలి. పలకడానికి చిన్నదిగా ఉండాలి మరియు అది ఇంతకు ముందు ఎక్కడైతే ఉపయోగించబడుతుందో అక్కడ తక్కువగా ఉపయోగించబడాలి. ఇలాంటి లక్షణాలలో లభించినవే x, y, z...

పై సమీకరణములో తెలియని రాశిని 'x' చే సూచిస్తే అది కింది విధంగా ఉంటుంది.

$$x + 6 = 10 \rightarrow (2)$$

(1), (2) లను చూసినప్పుడు (1) కంటే (2) ను అర్థం చేసుకోవడం సులభం అని మనం గుర్తించగలం. తదుపరి

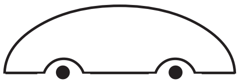
**మీరు ఈ కింది ప్రవచనంలో ఏకీభవిస్తారా?**

**గుర్తులను ఉపయోగించడంవల్ల జీవితం సులభతరమౌతుంది.**

తెలియని రాశికి ఇలా గుర్తును మొదటగా 1590లో ఫ్రెంచి గణితవేత్త ఫ్రాన్‌కోయిస్ వియోటా (francois vieta) ఉపయోగించాడు.

**చరరాశి :**

పావని, సాగర్‌లు పేపర్‌పై కార్ల నమూనాను గీస్తున్నారు. వారు కార్ల చక్రాలకు బదులుగా పై పటంలో చూపినట్లు నల్లబొట్టు బిళ్లలను వాడుతున్నారు. పావని రెండు బొట్టుబిళ్లల సహాయంతో ఒక కారు పటాన్ని కింద చూపిన విధంగా తయారు చేసింది.



వెంటనే సాగర్ మరి రెండు బొట్టు బిల్లల సహాయంతో మరి ఒక కారు పటాన్ని మొదటి దాని ప్రక్కనే తయారుచేశారు.

ఇలా తయారుచేస్తున్న సమయంలో వారి మిత్రుడు రవి వచ్చి ఒక వేళ ఇలాంటి పటాలను నాల్గింటిని తయారుచేయాలంటే ఎన్ని బొట్టు బిళ్లలు కావాలి అని అడిగాడు. పావని వెంటనే వారు తయారుచేసిన రెండు పటాలకు ఎన్ని బొట్టు బిళ్లలు అవసరమో అయ్యాయో లెక్కపెట్టి వానిని రెట్టింపు చేసి 8 కావాలని చెప్పింది. దానికి రవి పావనిని మెచ్చుకుంటూ తిరిగి "ఒక వేళ ఇలాంటి పటాలను 59 తయారుచేయాలంటే ఎన్ని బొట్టు బిళ్లలు కావాలి?" అని అడిగాడు.

పావని సాగర్‌లకు ఇంతకు ముందు విధంగా లెక్కించి చెప్పటం కష్టమని అర్థమైంది. వారు కొద్దిసేపు ఆలోచించి కింది పట్టికను తయారుచేశారు.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| కార్ల సంఖ్య | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య | 2 | 4 | 6 | 8 | ... |

పై పట్టిక నుంచి మీరేమైనా ఒక సంబంధాన్ని రాబట్ట గలరా? ఇదే సంబంధాన్ని పావని, సాగర్‌లు ఈ కింది విధంగా రాశారు. కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య = 2× కావలసిన కార్ల బొమ్మల సంఖ్య → (1)

దీని ఆధారంగా 59 కార్ల నమూనా పటాలను తయారుచేయుటకు అవసరమయ్యే బొట్టుబిళ్లల సంఖ్యను పావని, సాగర్‌లు కనుగొనగలిగారు. సులభంగా ఉండుటకు కావలసిన కార్ల సంఖ్యను 'x' అనుకొంటే (1) ని కింది విధంగా రాయవచ్చు.

కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య = 2x.

మనం ఒక కారు పటాన్ని తయారుచేయాలనుకుంటే x = 1 అవుతుంది. కనుక కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య = 2

అదే విధంగా రెండు కార్లను తయారుచేయాలనుకుంటే x = 2 అవుతుంది కనుక కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య = 2 × 2 = 4

ఈ విధంగా అవసరమైనన్ని కార్ల బొమ్మల తయారీకి అవసరమయ్యే బొట్టు బిళ్లల సంఖ్యను కనుగొనవచ్చు.

ఇచ్చుట 'x' ను చరరాశి అంటాము. దీని విలువ 1 లేదా 2 లేదా 3 ...... కావచ్చు. అంటే x విలువ స్థిరం కాదు. దీని విలువ సందర్భమును బట్టి మారుతూ ఉంటుంది.

**నిజజీవితంలో మనం ఉపయోగించే రాశులలో చరరాశులకు కొన్ని ఉదాహరణలివ్వండి.**

# ఇ) రేఖాగణితం - అభ్యసన ఆధార పత్రం

## (Approach paper on Geometry)

**రేఖాగణిత అధ్యయన ప్రాధాన్యత :**

రేఖాగణిత అధ్యయనం అనేది మానవ చరిత్రలో అద్భుతమైన ప్రాచీనమైన, సౌందర్య కళ, ప్రాచీన నాగరికత నుండి గణిత విజ్ఞాన పరిణామ క్రమాన్ని పరిశీలిస్తే బాబిలోనియన్లు మొదలు ఈజిప్టియన్ల వరకు అంటే క్రీ.పూ. 300 నుండి క్రీ.శ.100 వరకు ఇది ఒక ప్రత్యేక అధ్యయన అంశంగానే ప్రాచుర్యం పొందింది. ప్రాచీన ఈజిప్ట్‌లో తత్వశాస్త్రవేత్త "టోలమీ-1" అంతర్జాతీయ విశ్వవిద్యాలయం స్థాపించినపుడు ప్రముఖ విద్యావేత్త అయిన "యూక్లిడ్" (గ్రీస్)ను గణిత శాస్త్ర విభాగాధిపతిగా చేసాడు. ఆకాలంలో యూక్లిడ్ తన సహచరులతో కలసి తొలిసారిగా రేఖాగణితాన్ని స్వీకృతాధార అధ్యయన విధానంగా రూపొందించి ప్రపంచవ్యాప్తంగా దానిని "యూక్లిడ్ రేఖాగణితం" గా ప్రాచుర్యం కల్పించాడు. యూక్లిడ్ సంకలన గ్రంథమైన "ద ఎలిమెంట్స్" ప్రపంచ వ్యాప్తంగా జ్యామితి అధ్యయనంలో విప్లవాత్మకమైన మార్పులు తీసుకొని రావడమే కాకుండా బైబిల్ తర్వాత అత్యంత ప్రాచుర్యం, అనేక ఇతర భాషలలోనికి తర్జుమా కాబడిన గ్రంథంగా కీర్తి గడించింది.

రేఖాగణిత అధ్యయనం అనేది పాశ్చాత్యదేశాల విద్యావిధానానికి పునాదిగానూ, యువకులలో తార్కిక ఆలోచనలు ప్రేరేపించి పటిష్ఠపరిచే శాస్త్రంగా యూక్లిడ్ కాలం నుండే భావింపబడేది. తర్వాత కాలంలో యూక్లిడేతర రేఖాగణితం రూపొందించబడడంతో గణితంలో వివిధ రకాలైన సమస్యల సాధనకు దీని అధ్యయనం మరింత విస్తృతమైనది. శాస్త్రవేత్తలు, ఇంజనీర్లు ఆధునిక రేఖాగణిత భావాలను ఉపయోగించి ప్రకృతి రహస్యాలను చేధించి మానవ అవసరాలను తీర్చడానికి అనేక వనరులు (కట్టడాలు, వంతెనలు, రవాణా మార్గాలు మొదలగునవి) సృష్టించడం జరిగింది. ఇదే విధంగా వివిధ కళారంగాలు అభివృద్ధి చెందాయి. చిత్రకారులు, డిజైనర్లు, నిర్మాణ కౌశలాలు పెంపొందించే దిశలో త్రిమితీయ ఆకారాల నుండి సమతల పటాలను (ద్విమితీయ ఆకారాలు) రూపకల్పనచేసారు. ఉదాహరణకు సినిమా తెరలు, టెలివిజన్ తెరలు ప్రధానంగా జ్యామితీయ భావాలైనప్పటికీ ప్రాకృతికంగా యూక్లిడేతర జ్యామితికి అనువర్తనాలుగా భావించవచ్చు. అయితే దురదృష్టవశాత్తూ అనేక సందర్భాలలో ఈ ఆధునిక జ్యామితీయ భావాలకు వాటి అనువర్తనాలకు మన సెకండరీ స్థాయి గణిత ప్రణాళికలో చోటు కల్పించబడలేదు.

జామెట్రీ (Geometry) అనే పదం రెండు గ్రీకు పదాలైన జియో (Geo) అంటే "భూమి" మరియు మెట్రాన్ (Metron) అంటే "కొలత" నుండి నిర్వచించబడ్డాయి. ప్రాచీన గ్రీకులు, జ్యామితీయ భావాలను మానవ అవసరాలు, ఆసక్తులకు అనుగుణంగా క్రమబద్ధంగానూ, హేతుబద్ధంగానూ అమర్చారు. అదే విధంగా బాబిలోనియన్లు వృత్తపరిధిని 360 సమాన భాగాలు చేసారని, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం పైథాగరస్ కన్నా ముందుగానే వినియోగించారని, నిష్పత్తి అనుపాత సమస్యలకు, త్రిభుజ ధర్మాలను, భుజాలకు, కోణాలకు మధ్య సంబంధాలు కనుగొన్నారని చెప్పడానికి చాలా ఆధారాలున్నాయి.

బాబిలోనియన్ల నుండి ఈజిప్టియన్ల వరకు గణిత అధ్యయనం ముఖ్యంగా అనేక ప్రశ్నలకు సమాధానాలను ఇస్తుంది. మొదట్లో ఈ ప్రశ్నలన్నీ "ఎలా?" తో ప్రారంభమయ్యాయని చెప్పవచ్చు. ఉదాహరణకు అప్పుతీసుకున్న సొమ్ముపై వడ్డీని 'ఎలా' లెక్కిస్తాం? ఇచ్చిన కొలతల ఆధారంగా పిరమిడ్ ఘనపరిమాణాన్ని 'ఎలా' గణిస్తాం? ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గమూలం 'ఎలా' కనుగొంటాం? వంటి అనేక ప్రశ్నలు తార్కిక ఆలోచనలకు పదును పెట్టాయి. క్రీ.శ.100 సం॥ నుండి పాశ్చాత్యదేశాలలోనూ, మధ్యప్రాచ్య ప్రాంతాలలోనూ అర్థశాస్త్ర ప్రాధాన్యత పెరిగి క్రమంగా గణితభాష, నాణాలకు సంబంధించిన అంశాలు పునాది వేశాయి. తర్వాత కాలంలో గణితంలో ప్రశ్నలు వేయడంలోనూ, ఆలోచనా విధానాలలోనూ మార్పులు వచ్చి "ఎందుకు?" వంటి ప్రశ్నలు మొదలైనాయి. ఉదాహరణకు త్రిభుజ వైశాల్యం దాని భూమి, ఎత్తుల లబ్దంలో సగం "ఎందుకు" అయింది? లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మీద వర్గం, మిగిలిన రెండు భుజాల మీద వర్గాల

మొత్తానికి సమానం "ఎందుకు" అయింది? వంటి ప్రశ్నలు మరింత హేతుబద్ధంగా ఆలోచించడానికి, తార్కికంగా కారణాలు చెప్పడానికి దోహదపడ్డాయి. ఏదేమైనా గణితంలో విప్లవాత్మకమైన మార్పులు శాస్త్ర సాంకేతిక రంగాలలోనూ, వాణిజ్య రంగాలలో ప్రగతి సాధించుటకు దోహదపడింది. జ్యామితి అధ్యయనం ఎన్ని మార్పులకు గురైనప్పటికీ గ్రీకులు వేసిన ఆలోచనా విధానం నేటికీ సమాజాన్ని ప్రభావితం చేస్తున్నదని చెప్పవచ్చును.

**రేఖాగణితం - నేర్చుకునే క్రమం :**

రేఖాగణితం నేర్చుకునే క్రమంను ముఖ్యంగా మూడు దశలుగా విభజింపవచ్చును.

**ప్రాకృతిక రేఖాగణితం**
**(Natural Geometry)**

**ప్రాకృతిక స్వీకృతాధార రేఖాగణితం**
**(Natural axiomatic Geometry)**

**నియత స్వీకృతాధార రేఖాగణితం**
**(Formal axiomatic Geometry)**

**"ప్రాకృతిక రేఖాగణితం"** పరిసరాలలో లభించే వస్తుసముదాయాలనుండి ప్రారంభమౌతుంది. ఇది నిజజీవిత అనుభవాలకు దగ్గరగా ఉండి, ఆత్మపరిశీలన ద్వారా తార్కిక ఆలోచనలను ప్రేరేపించే విధంగా ఉంటుంది. ఈ రేఖాగణిత అధ్యయన దశలో ప్రధానంగా వస్తువులు, కాగితాలపై గీచే రేఖాచిత్రాలు, కంప్యూటర్ తెరపై వేసే బొమ్మలు ప్రధాన పాత్ర పోషిస్తాయి. గీయడం, కొలవడం వంటి సాధారణ ప్రక్రియలు, జ్యామితి పరికరాలు వినియోగించి ప్రయోగాత్మకంగా నేర్చుకోవడం, ప్రతిక్షేపణ పద్ధతుల ద్వారా స్వీయ అనుభవాలు పొందడం దీనిలో భాగం. నూతన పాఠ్యపుస్తకాలలో అంటే 6, 7, 8 తరగతుల గణితంలో పరిసరాలలో లభించే వివిధ వస్తువులు, ఆకారాలద్వారా రేఖాగణిత భావాలను రాబట్టిన విధానం రాయబడింది. ఇదే విధంగా మూల మట్టాలు ఉపయోగించి ఏవిధంగా సమాంతర రేఖలు గీస్తామో చూపబడింది. వృత్తలేఖిని, కొలబద్ద ఉపయోగించి ప్రాథమిక రేఖాగణిత నిర్మాణాలు చర్చించబడ్డాయి. పరిశీలనలు, అనుభవాలు, రుజువుల ద్వారా కారణాలను అన్వేషించి వస్తురూపాలకు ఆకృతులు, ఆకృతులను పటాలుగా ఊహించుకొని నిర్దిష్టమైన ప్రవచనాలు ఉత్పాదించబడతాయి.

**"ప్రాకృతిక స్వీకృతాధార రేఖాగణితం"** లో వస్తువుల ప్రేరణ ద్వారా పొందిన రేఖాగణిత పటాల ధర్మాల ఆధారంగా కారణాలను అన్వేషించి పటాలలో వివిధ భాగాలమధ్య సంబంధాలు ఏర్పరచబడతాయి. సునిర్వచిత పదాలు, స్వీకృతాలు, ప్రతిపాదనలను తార్కికంగా అవగాహన చేసుకొని నూతన సంబంధాలను ఆవిష్కరించడం జరుగుతుంది. ఈ క్రమంలో వ్యవస్థలోపల వివిధ అంశాలమధ్య సంబంధాలను ఏర్పరచడం ద్వారా విశ్వసనీయత, ఖచ్చితత్వం పెంపొందుతుంది. వీటి విశ్వసనీయతకు దత్తాంశ పరమైన నిగమన సూత్రాలు వినియోగించబడతాయి. 9, 10 తరగతుల రేఖా గణిత అధ్యయనంలో సిద్ధాంతాల నిరూపణకు పటాల ద్వారా ప్రయోగాత్మకంగా పరిశీలించి, జ్యామితీయ స్వీకృతాలనుపయోగిస్తాము. ఉదాహరణకు "సమాంతర చతుర్భుజంను కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది" అనే సిద్ధాంత నిరూపణకు సమాంతర చతుర్భుజ పటం, దానిలో భాగాలు తెలిసి ఉండాలి. అదే విధంగా త్రిభుజ సర్వసమానత్వ నియమాల స్వీకృతాలు తెలిసి ఉండాలి. సిద్ధాంత నిరూపణలో క్రమయుతమైన విధానం అవగాహన కలిగి ఉండాలి. ఈ విధంగా, ఈ దశలో అమూర్తంగా ఉన్న కీలక భావనలను మనం నమ్మేకొన్ని సత్యాల (స్వీకృతాలు) ఆధారంగా నిరూపించడానికి అవకాశం కలుగుతుంది.

**"నియత స్వీకృతాధార రేఖాగణితం"** అమూర్త భావనల నుండి మరిన్ని అమూర్త భావనలకు దారితీసి అంతరాళంలో ప్రతి వస్తువును ఊహించి, వాటి ధర్మాలను సాంకేతిక రూపంలో అన్వయించడం మొదలవుతుంది. రేఖలను, వక్రాలను బీజగణిత సమీకరణాలలో వ్యక్తపరచడం ద్వారా అమూర్తమైన భావజాలాన్ని అభివృద్ధి చేయడం జరుగుతుంది. తద్వారా రేఖాగణితం వైశ్లేషికంగా రూపాంతరం చెంది, నూతన ఆవిష్కరణలకు దారితీస్తుంది. ఉదాహరణకు $ax + b = c$ $(a\neq0)$ అనేది ఏక చలరాశిలో రేఖీయ సమీకరణం అయితే $ax^2 + bx + c=0$ $(a\neq0)$ ఒక వర్గసమీకరణం మరియు దీని రూపం ఒక వక్రం అవుతుంది. ఈ విధంగా రేఖలకు, వక్రాలకు, వృత్తాలకు, స్థూపాలకు వివిధ బీజయ సమాసాలు జతపర్చబడతాయి.

గణితంలో క్రమానుగతమైన హేతుబద్ధీకరణ అన్ని సందర్భాలలోనూ కుదరదు. గణిత శాస్త్రానికున్న విలువలు, దృక్పథం ఖచ్చితంగా దీనిని ప్రభావితం చేస్తాయి. ఉపపత్తి ప్రధానమైనదే అయినప్పటికీ నిగమన పద్ధతి ద్వారా పాఠశాల స్థాయిలో రాబట్టే నిరూపణల వలన కొన్ని సందర్భాలలో గణిత స్వభావం దెబ్బతినవచ్చు. కొన్ని సందర్భాలలో ఒక పటం, మరికొన్ని సందర్భాలలో ఒక నిర్మాణం ద్వారా ఉపపత్తి చెప్పవచ్చు. అందుచే ఒక సిద్ధాంతానికి ఇచ్చే ఉపపత్తి ఒకే విధంగా ఉండాలనే సాంఘిక నియమం ఏదీలేదు. పైథాగరస్ సిద్ధాంతానికి సుమారు 100కుపైగా నిరూపణలున్నాయంటే ఆశ్చర్యం కలుగకమానదు. గణిత తార్కికతకు అనుగుణంగా ఏర్పరచుకున్న నియమాలకు అనుగుణంగా ఉపపత్తిని రాబట్టవచ్చు. ఒక సిద్ధాంత నిరూపణలో ముఖ్యంగా వాదనలకు చోటు కల్పించాలి. ఈ వాదనలను క్రమబద్ధంగా అమరిక చేసి, స్వీకృతాలను జోడించి సిద్ధాంతాలను నిరూపించే విధంగా విద్యార్థులను ప్రోత్సహించాలి.

**చర్చనీయాంశాలు**

చర్చించి – రాయండి.

1) మీ ఇంటిలో ఉన్న వివిధ వస్తువుల జాబితాను రూపొందించి వాటిలో ఇమిడి ఉన్న రేఖాగణిత భావనలు వివరించండి.

2) పాఠశాల స్థాయిలో ఏ రేఖాగణిత భావాలు (a) వస్తువుల ద్వారా (b) రేఖాగణిత పరికరాల ద్వారా (c) ప్రయోగాత్మకంగా (d) తార్కిక కారణాల ద్వారా విద్యార్థులు నేర్చుకుంటారో రెండేసి ఉదాహరణలు తెల్పండి.

3) "త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తం $180^0$" అనే ప్రతిపాదన నిరూపణకు మీరు అవలంబించే విధానాలు (నిరూపణ పద్ధతులు) తెల్పండి. వివరించండి.

### రేఖాగణిత నిర్మాణాలు – ప్రత్యేకశైలి :

రేఖాగణిత అధ్యయనంలో జ్యామితీయ నిర్మాణాలు ప్రత్యేకపాత్ర పోషిస్తాయి. ప్రాకృతిక రేఖాగణితం నుండి ప్రాకృతిక స్వీకృతాధార రేఖాగణిత దశకు మారే క్రమంలో ఈ నిర్మాణాలు అందు ఇమిడివున్న తార్కికత ఖచ్చితంగా విద్యార్థులను ప్రభావితం చేస్తాయి.. ప్రకృతి సిద్ధమైన, మానవ నిర్మితమైన వస్తువులను, ఆకారాలను పటాలుగా గీయడం అనేది అన్ని వయస్సుల వ్యక్తులకు ఒక అనుభూతిని కలిగించే ప్రక్రియ. ఇది చాలా మంది విద్యార్థులకు ఒక సవాలు వంటిది. ప్రాథమిక రేఖాగణిత నిర్మాణాల ప్రక్రియకు గల ప్రత్యేక శైలిని అవగాహన చేసుకుంటే ఇవి గణితశాస్త్ర అధ్యయనానికి ఏ విధంగా దోహదపడతాయో అవగాహన అవుతుంది.

ప్రాథమిక జ్యామితీయ నిర్మాణాలను సాధన చేయడంతోబాటు, వాటిని అర్థవంతమైన సందర్భాలలో వినియోగించడం, సరియగు భాష వినియోగించడం, తగిన పరికరాల ఎంపిక మొదలగునవి పిల్లలు గణితంలో నేర్చుకునే అమూర్త భావనలకు, ప్రక్రియలకు నాంది పలుకుతాయి. రేఖాగణితం ఒక క్రమయుతమైన అధ్యయన విభాగంగా గుర్తింపు పొందడానికి నిర్మాణాలే మూలస్తంభాలు.

జ్యామితీయ నిర్మాణాలను రూపొందించిన విధానంలో ప్రతిపాదనలకు అనుగుణంగా ప్రతి సోపానంనకు తగిన కారణాలు, స్వీకృతాలు ఎంతైనా అవసరం. ప్రాథమిక జ్యామితి నిర్మాణాలు ప్రధానంగా రెండు పరికరాలు రూలర్ (కొలతలులేని

కొలబద్ద) మరియు వృత్తలేఖినిని మాత్రమే వినియోగించి చేయాలనేది ఒక నియమం. కాని ఇటీవల కాలంలో కొలబద్ద (స్కేలు), కోణమానిని ఎక్కువగా ఉపయోగించుకొని, నిర్మాణాలు సులభతరంగా చేయవచ్చుననే వాదనతో నిర్మాణాల ప్రత్యేకశైలి దెబ్బతినడమే కాకుండా, పిల్లలలో సహజసిద్ధమైన నిర్మాణకౌశలాలు పెంపొందించలేకపోతున్నాము. అదే విధంగా జ్యామితీయ నిర్మాణాలలో సౌందర్యాన్ని, ఖచ్చితత్వాన్ని పొందలేకున్నాము.

'రూలర్' అనేది రెండు బిందువులు తెలిస్తే వాటి మధ్య రేఖాఖండం గీయడానికి, 'వృత్తలేఖిని' అనేది స్థిరబిందువు, స్థిర వ్యాసార్థం తెలిసినపుడు చాపరేఖను గీయడానికి ఉపయోగిస్తాం.

వీటిని వినియోగించి అన్నికొలతలకు రేఖా ఖండాలనూ, కోణాలను గీయలేమని వాదన. అదేవిధంగా అన్ని కోణాలను


రూలర్ (కొలబద్ద)

కాంపాస్ (వృత్తలేఖిని)

త్రిథాకరించలేము (Trisection). అయితే రేఖాగణిత అధ్యయనం చేయడంలో గ్రీకుల ఉద్దేశ్యం సరళతర్కం (Simple logic) ద్వారా సమస్యలు సాధించడం కాబట్టి ఈ రెండు పరికరాలే ప్రాథమికంగా వాడాలన్నారు.

జ్యామితీయ నిర్మాణాలకు సంబంధించిన మనం చూసే ప్రశ్నలు రెండు విధాలుగా ఉంటాయి. ఇచ్చిన కొలతలతో

1) పటాన్ని గీయండి. (Draw the figure)
2) పటాన్ని నిర్మించండి. (Construct the figure)

- 'పటాన్ని గీయండి' అంటే అందుబాటులో ఉన్న ఎటువంటి జ్యామితి పరికరాలనైనా వినియోగించవచ్చు.
- 'పటాన్ని నిర్మించండి' అంటే రూలర్ / స్కేలు (కొలతలేనిది) మరియు వృత్తలేఖిని మాత్రమే వినియోగించాలి. నూతన పాఠ్యపుస్తకాలలో జ్యామితీయ నిర్మాణాలను ప్రత్యేక శైలిలో ప్రవేశపెట్టి, తదనుగుణంగా నిర్మాణాలు చేయడంలో అవగాహన కల్పించబడింది. వివిధ కోణాలను, సమద్విఖండన రేఖలను గీయడంలో వృత్తలేఖినికి అధిక ప్రాధాన్యత కల్పించబడింది. కోణమానిని అనేది కోణ కొలతను సరిచూచుకోవడానికే అని భావించాలి. వివిధ జ్యామితి నిర్మాణాలలో ఇమిడిఉన్న మౌళిక ప్రక్రియలైన సమస్యాసాధన, తార్కికంగా ఆలోచించి కారణాలు చెప్పడం పిల్లలకు అవగాహన పర్చాలి. సోపానయుత నిర్మాణ విధానాన్ని కొనసాగించడంలో ప్రోత్సహించాలి.

**<u>చర్చనీయాంశాలు</u>**

చర్చించి - రాయండి.

1) రూలర్ / స్కేలు, కాంపాస్ ఉపయోగించి సమద్విబాహుత్రిభుజం నిర్మించండి. నిర్మాణ క్రమం రాయండి.
2) రూలర్ / స్కేలు, కాంపాస్‌లను మాత్రమే ఉపయోగించి కింది కోణాలను గీయండి. కోణమానినితో సరిచూడండి.

   a) $45^0$ b) $90^0$ c) $135^0$ d) $180^0$
3) $90^0$ కోణమును ఏ విధంగా త్రిథాకరించవచ్చునో సోపాన యుత క్రమాన్ని తెలపండి.
4) యూక్లిడ్ సమాంతర స్వీకృతం "ఒక రేఖకు, దానిపై లేనటువంటి బిందువు గుండా ఒకే ఒక సమాంతర రేఖను గీయగలం". రూలర్, కాంపాస్ ఉపయోగించి నిర్మాణం చేసి చూడండి.

### రిఫరెన్సు గ్రంథాలు :


- The Geometry reasoning of Primary and Secondary school stuedents - George panaoura, Dept. of Education, University of Cyprus.
- Position paper ''Teaching of Mathematics'' National curriculam Frame work 2005, New Delhi.
- Position paper ''Teaching of Mathematics'' State Curriculum frame workd-2011, A.P.

# ఈ) సాంఖ్యక శాస్త్రం - అభ్యసన ఆధార పత్రం

## (Approach paper on Statistics)

### సాంఖ్యక శాస్త్రం అంటే ఏమిటి?

సేకరించిన సమాచారమును శాస్త్రీయముగా విశ్లేషించి, ఫలితాలు రాబట్టుటను దత్తాంశముపై వ్యాఖ్యానం చేయుటను సాంఖ్యకశాస్త్రం అంటారు. ఇందులో ప్రధానంగా సమాచార సేకరణ, దత్తాంశ నిర్వహణ. దత్తాంశ ప్రదర్శన, విశ్లేషణ, వ్యాఖ్యానం చేయుట, పూర్వ పరిశీలనల నుంచి భవిష్యత్ ప్రణాళికలపై అంచనాలు చేయుట వంటి అంశాలు చర్చింబడతాయి.

### సాంఖ్యక శాస్త్రమును ఎందుకు అధ్యయనం చేయాలి?

నేటి సమాజంలో అన్ని రంగాలలో అనగా వ్యాపారం, వైద్యము, విజ్ఞానశాస్త్ర విభాగాలు, పరిపాలన, అర్థిక విభాగం మొదలగు వానిలో సంఖ్యాత్మక వివరాలను విశ్లేషించుటకు, వివిధ అంశాలను లేక దత్తాంశములను బేరీజు వేయుట, భవిష్యత్ కార్యక్రమాలకు ప్రణాళికలు తయారుచేయుట, అమలు పరచిన కార్యక్రమాల స్థితిని పరిశీలించు ఫలితాలను బేరీజువేయుట మొదలగు కార్యక్రమాలు నిత్యకృత్యమై ఉన్నాయి. ఈ అన్ని కార్యక్రమాలకు సమగ్రమైన సహకారాన్ని శాస్త్రీయతను అందించగల శాస్త్రం సాంఖ్యక శాస్త్రమే. పెరుగుతున్న పరిజ్ఞానముతోపాటు ప్రపంచంలో సంఖ్యాత్మక సమాచార విశ్లేషణ అవసరం అధిక ప్రాధాన్యతను సంతరించుకొనుచున్నది. వేల సంఖ్యలో ఉద్యోగులు సమాచార విశ్లేషణలో సేవలు అందించవలసిన అవసరమున్నది.

ప్రతి వ్యక్తి కూడా సంఖ్యాత్మక సమాచారమును వాటిపై చేసిన వ్యాఖ్యానములను తెలుసుకొన్నప్పుడు శాస్త్రీయ పరిజ్ఞానం నుండి స్వప్రయోజనాలను పొందగలడు.

ఏ కార్యాలయంలో అయినా సమాచారమంతా పట్టికల రూపంలో రేఖాచిత్రాల రూపంలో ప్రదర్శించబడి ఉంటుంది. ఈ సమాచార పట్టికలు, రేఖాచిత్రాలు చదవగలిగిన వ్యక్తి మాత్రమే ఆ కార్యాలయం నుండి ఎక్కువ ప్రయోజనాన్ని పొందగలడు. పై కారణాలన్నింటి వలన ప్రతి ఒక్కరు సాంఖ్యశాస్త్ర అధ్యయనం చేయవలసిన అవసరం ఎంతైనా కలదు.

> రానున్న దశాబ్దంలో గొప్పగా రాణించు ఉద్యోగం 'సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞుడు' (Statastician) ఎందుకంటే మనముందు ఇప్పుడు అవధులు లేని స్వేచ్ఛగా లభించు సమాచారం ఉన్నది. ఆ సమాచారమును అర్థంచేసుకొని, విశ్లేషించి, మదింపు చేయగల సామర్థ్యాలు అవసరం.
>
> – హాల్ వేరియన్, గూగుల్ ప్రధాన ఆర్థిక శాస్త్రవేత్త, 2009

### సాంఖ్యక శాస్త్ర ఆవిర్భావం – చరిత్ర :

1662లో జాన్ గ్రాంట్‌చే ప్రచురించబడిన 'Natural and Political Observation upon the Bills of Mortality' తో సాంఖ్యకశాస్త్రం ఒక శాస్త్రంగా ఆవిర్భవించడం పలువురి నమ్మకం. తొలుత సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులను జాతి, మతపరమైన ప్రజల విస్తుతి, ఆర్థిక సమాచారములను విశ్లేషణ నుండి సాంఖ్యకశాస్త్ర వినియోగం యొక్క పరిధి పెరిగినది. ప్రస్తుతం ప్రభుత్వ రంగం, వ్యాపార రంగం, వైజ్ఞానిక, సామాజిక రంగాలు మొదలగు అన్ని రంగాలలో సాంఖ్యకశాస్త్ర పరిజ్ఞానం వినియోగిస్తున్నారు. ఇంకా సాంఖ్యకశాస్త్ర పరిజ్ఞానం వినియోగించుకొనని రంగం లేదంటే అతిశయోక్తిలేదు. కంప్యూటర్ల ఆవిష్కారంతో సాంఖ్యకశాస్త్ర పరిజ్ఞానం వినియోగం మరింత మెరుగుపడినది.

### సెకండరీ విద్యలో సాంఖ్యకశాస్త్రం గురించి ఏమి చర్చించబోవుచున్నాము?

విద్యార్థుల స్థాయిని అనుసరించి 1) చిన్న చిన్న దత్తాంశములను సేకరించడం 2) దత్తాంశ నిర్వహణ 3) రేఖా చిత్రముల ద్వారా దత్తాంశ ప్రదర్శన – అర్థం చేసుకోవడం మరియు నిర్మించడం 4) పౌనఃపున్య విధానములను తయారుచేయుట 5) కేంద్రస్థాన

కొలతలను కనుగొనుట మరియు 6) వ్యాఖ్యానం చేయుటల గురించి 6వ తరగతి నుండి 10వ తరగతి వరకు స్థాయిల వారీగా క్రమంగా చర్చించుట జరిగినది.

### దత్తాంశం అంటే ఏమిటి? పౌనఃపున్య విభాజనము ఎందుకు చేయాలి?

ఒక ప్రత్యేక ప్రయోజనము కొరకు ప్రత్యక్ష పరిశీలన (Survay) ద్వారా సేకరించబడిన (లేక కొన్ని దత్తాంశముల నుండి సేకరించబడిన) సంఖ్యాత్మక విలువలు లేక మరి ఏ ఇతర సమాచారమునైనా దత్తాంశము అంటారు.

దత్తాంశములో పరిమిత సంఖ్యలో రాశులు ఉన్నప్పుడు ఆ దత్తాంశమును విశ్లేషించుట లేక వ్యాఖ్యానించుట సులభము కానీ దత్తాంశములోని రాశులు సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఆ దత్తాంశమున పట్టిక రూపములో నిర్వహించినప్పుడు విశ్లేషణ సులభ సాధ్యమవుతుంది. కొన్ని దత్తాంశములను పట్టిక రూపంలో (పౌనఃపున్య విభాజనము) చూపడంతో పూర్తి అవగాహన ఏర్పడుతుంది. మరొక విశ్లేషణ అవసరం లేదు.

2 10 11 17 18 46 47 47 21
35 44 45 48 26 26 37 27 7
9 54 54 54 54 54 54 13 14
49 36 21 24 25 25 28 29 5
3 30 31 32 32 38 38 39 41
15 68 69 33 34

అవర్గీకృత ప్రాథమిక దత్తాంశం

**పటం - 1**

| తరగతి అంతరాలు | పౌనఃపున్యం |
|---|---|
| 0 – 10 | 5 |
| 10 – 20 | 7 |
| 20 – 30 | 10 |
| 30 – 40 | 12 |
| 40 – 50 | 8 |
| 50 – 60 | 6 |
| 60 – 70 | 2 |

పౌనఃపున్య విభాజనం

**పటం - 2**

అవగాహన కొరకు లేక దత్తాంశములని రాశుల సంఖ్య అధికంగా ఉన్నప్పుడు కూడా పౌనఃపున్య విభాజనము రూపంలోని దత్తాంశము సంక్షిప్తంగాను, సమగ్రంగాను ఉంటుంది.

తరువాత స్థాయి; దత్తాంశమును విశ్లేషణ చేసి వ్యాఖ్యానములు చేయడం, కొన్ని విలువలు / రాశులు గల దత్తాంశమునకు ప్రాథమిక రూపం నుండి కూడా విశ్లేషణ చేయవచ్చును. కానీ అధిక సంఖ్యలో విలువలు / రాశులు గల దత్తాంశములకు పౌనఃపున్య విభజనము తయారుచేసుకొని దాని విశ్లేషణలు వ్యాఖ్యానము చేయవలసి ఉంటుంది. ఈ క్రమంలో విద్యార్థుల స్థాయి, అవసరాలను బట్టి సాంఖ్యక శాస్త్రంలో వివిధ స్థాయిలను అభ్యసించ వలసి ఉంటుంది. అందువల్ల సెకండరీ స్థాయిలోని సాంఖ్యకశాస్త్ర పాఠ్యాంశము క్రమాన్ని కింది విధంగా నిర్వహించడం జరిగినది.

సేకరించిన దత్తాంశములోని రాశులు / విలువల సంఖ్య పరిమితంగా ఉన్నప్పుడు వానిని రికార్డు చేయడము, రాశులను పరస్పరం పోల్చడం, మరొక దత్తాంశముతో పోల్చడం చేయుట సులభమేకానీ దత్తాంశంలోని రాశులసంఖ్య ఎక్కువగానున్నప్పుడు లేక రాశులకు పౌనఃపున్యములున్నప్పుడు దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజనము రూపములో ప్రదర్శించినప్పుడు అధ్యయనం అవగాహన పెరుగుతుంది.

ఉదా:- 50 మంది విద్యార్థుల మార్కులు కింది విధాలుగా ప్రదర్శిస్తే

ప్రాథమిక దత్తాంశము

31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36
33, 41, 37, 25, 22, 14, 3, 25
27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18
7, 21, 20, 35, 36, 45, 9, 19
29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34
38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25
18, 8

పౌనఃపున్య విభాజనము

| తరగతి అంతరం | గణన చిహ్నాలు | పౌనఃపున్యం |
|---|---|---|
| 0 - 7 | \|\|\|\| | 4 |
| 8 - 15 | ~~\|\|\|\|~~ \| | 6 |
| 16 - 23 | ~~\|\|\|\|~~ | 9 |
| 24 - 31 | ~~\|\|\|\|~~ ~~\|\|\|\|~~ \|\|\| | 13 |
| 32 - 39 | ~~\|\|\|\|~~ ~~\|\|\|\|~~ \|\|\|\| | 14 |
| 40 - 47 | \|\|\|\| | 4 |

పై రెండు విధాలను పరిశీలిస్తే పౌనఃపున్య విభాజనమే ఎక్కువ అవగాహనను కల్పిస్తున్నదని తెలియుచున్నది కదా.

పరిమిత సంఖ్యలో రాశులు గల దత్తాంశమును విశ్లేషణ చేయుట.

కింది ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిద్దాము.

ఒక మార్కెట్టునందలి వివిధ దుకాణములలో 1 కిలో మసూరి బియ్యము ధర 22, 35, 37, 42, 24, 35, 41, 37, 40, 37, 30, 39, 42, 38, 37, 41, 37 (రూపాయలలో)

ఈ విలువలన్నింటిని ఆరోహణ క్రమములో రాయగా 22, 24, 30, 35, 35, 37, 37, 37, 37, 37, 38, 39, 40, 41, 41, 42, 42.

- దత్తాంశములోని కనిష్టరాశి : 22, గరిష్ట రాశి : 42 వీనిబేధం : 42−22 = 20. ఈ బేధమును దత్తాంశ వ్యాప్తి అంటారు. ఇవి దత్తాంశములోని రాశులు ఎక్కడ నుండి ఎక్కడ వరకు విస్తరించి ఉన్నాయో తెలుపుతుంది.
- దత్తాంశములోని 17 రాశులతో మధ్యమరాశి (9వ రాశి) అనగా 37 రూ. 1 కిలో బియ్యం ధర మరియు అంతకన్నా తక్కువ ధర కూడా అన్నే దుకాణములలో దత్తాంశము యొక్క **మధ్యగతము** అంటారు.
- దత్తాంశమును పరిశీలిస్తే – ₹ 37 ఎక్కువసార్లు పునరావృతం అయినది అనగా పెక్కు దుకాణములలో 1 కిలో బియ్యం వెల ₹ 37 అని నిర్ధారించవచ్చును. ఈ విలువను దత్తాంశమునకు **బాహుళకము** అంటారు.
- ఇదే విధంగా దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు సంఖ్యను దత్తాంశము యొక్క **సరాసరి** లేక **సగటు** అంటారు.
- వీటిలో సరాసరి / సగటు / అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము దత్తాంశ మధ్యభాగంలో ఉండి దత్తాంశమునకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయి కావున వీటిని **ప్రాతినిధ్య విలువలు / మధ్యంతర విలువలు (Values of Control Tendency)** అంటారు. ఇవే కాక మరికొన్ని మధ్యంతర విలువలు కూడా కలవు వాటిని పై తరగతులలో అధ్యయనం చేయవలసి వస్తుంది.

## ఏయే మధ్యంతర విలువలు ఎప్పుడు వినియోగించాలి?

6, 7 తరగతులలో ప్రాథమిక దత్తాంశమునకు మధ్యంతర విలువలు కనుగొనుట గురించి చర్చించడం జరిగినది. అయితే అన్ని మధ్యంతర విలువలను అన్ని సందర్భములలో ఉపయోగించనవసరం లేదని, ఏ సందర్భములో ఏ మధ్యంతర విలువను ఉపయోగించాలో విద్యార్థులతో చర్చించవలసిన అవసరం ఉన్నది. దీనికొరకై 7వ తరగతిలో ప్రత్యేక సమస్యలు కేటాయించబడ్డాయి.

### పౌనఃపున్య విభాజనములను నిర్మించుట ఎట్లు?

పెక్కు రాశులు గల దత్తాంశములో కొన్ని విభిన్న రాశులు మాత్రమే ఉండి అవి మరల మరల పునరావృతం అవుతూ ఉంటే రాశులను వాటి పౌనఃపున్యములతో చూపు పట్టిక రూపాన్ని (సంక్షిప్త రూపాన్ని) అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము అంటారు.

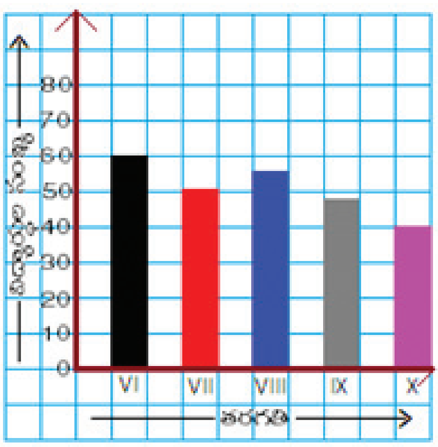
ఇదే విధంగా పెక్కు రాశులు గల దత్తాంశములో విభిన్న రాశులు కూడా ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు పై విధమైన పౌనఃపున్య విభాజనము సంక్షిప్తంగా చూపలేరు. కావున విభిన్న రాశులను ఆరోహణ / అవరోహణ క్రమములో కొన్ని వర్గములుగా విభజించి పౌనఃపున్యములలో మరింత సంక్షిప్తముగా సూచించవచ్చును. దీనిని వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము అంటారు. పై రెండు రకముల పౌనఃపున్య విభాజనములు ఎట్లు, ఎప్పుడు, ఎందుకు తయారుచేసుకొనవలెనో 8వ తరగతిలో వివరించబడినది.

అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములకు మధ్యంతర విలువలు (అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము) సంక్షిప్త పద్ధతులు అనగా సూత్రములను ఉపయోగించి కనుగొనుట 9వ తరగతిలో సవివరంగా, సహేతుకంగా వివరించబడినది.

### దత్తాంశముపై సార్వజనీన అవగాహన కొరకు రేఖా చిత్రాలు :

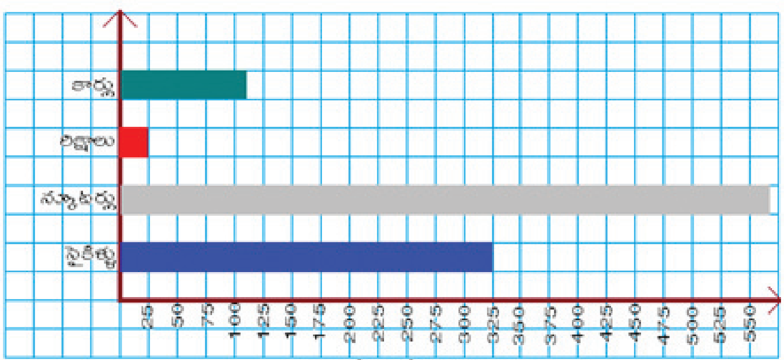
దత్తాంశమును సంఖ్యాత్మకముగా పట్టికలలో ప్రదర్శించుట కంటే చిత్రముల ద్వారా చూపినప్పుడు అవగాహన మరికొంచెం మెరుగుగా ఉంటుంది. దత్తాంశములోని విభక్త రాశులు / ఒక దానిని మరొకటి ప్రభావితం చేయని రాశులను వాటి పరిమాణములలో చూపుటకు చిన్న చిన్న సంఖ్యలు (బొమ్మలు) ఉపయోగించి చిత్రపటాలు (pictograph) గా చూపుతాము. ఈ పటాలలోని సారాంశం చిన్న పిల్లలకు, చదువురానివారికి సైతం అర్థం అవుతాయి. కావున వీటిని పరిశీలించుట, వినియోగించుట 3వ తరగతి నుండి అభ్యసింపజేస్తున్నాము. చిత్రపటాల నిర్మాణం 6వ తరగతిలో బోధించినప్పటికి వీటి నిర్మాణానికి అవసరమయ్యే సమయం ఎక్కువ కావున దీని రూపాంతరము "కమ్మీరేఖాచిత్రము"లను అభ్యసింపజేస్తాము.

కమ్మీరేఖా చిత్రములలోని కమ్మీలు ఒక దానిపై ఒకటి ఆధారపడని అంశాలు కావున కమ్మీల వరుస క్రమము మార్చినను అవగాహనలో ఎటువంటి మార్పు ఉండదు. ఈ చిత్రాలలోని కమ్మీల వెడల్పులు సమానంగా ఉండి వేరువేరు పొడవుల వలన మాత్రమే దారుల విలువలను చూపుతాము. వివిధ రాశుల పరిమాణముల మధ్య బేధం తక్కువగా ఉన్నప్పుడు నిలువు కమ్మీ రేఖాచిత్రాలు మరియు రాశుల పరిమాణముల మధ్య బేధం ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు అడ్డు కమ్మీ రేఖాచిత్రములు ఉపయోగిస్తాము. దీనివలన సౌలభ్యం గమనించండి (?) విద్యార్థి స్థాయి పెరుగుతున్న దృష్ట్యా 7వ తరగతిలో రెండు కమ్మీల రేఖాచిత్రములను ప్రవేశపెట్టడం జరిగినది.



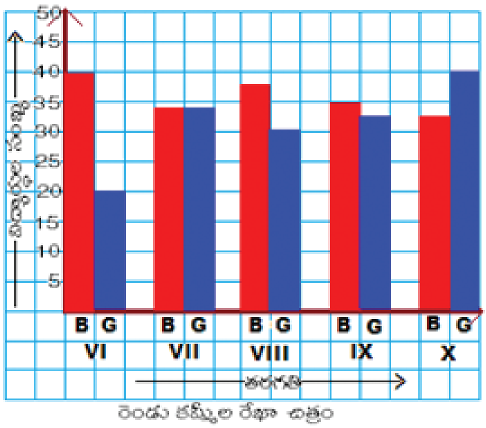

నిలువు కమ్మీల రేఖా చిత్రం

పటం – 3




అడ్డు కమ్మీల రేఖా చిత్రం

పటం – 4




రెండు కమ్మీల రేఖా చిత్రం

**పటం – 5**

వృత్త రేఖా చిత్రం

**పటం –6**

కింది వాటిలో వేటిని నిలువు రేఖాచిత్రములుగా, వేటిని అడ్డ కమ్మీరేఖాచిత్రములుగా చూపవలెనో అవకాశములను చర్చించండి.

1) ఒక కాలనీలోని బాలబాలికలు, యువత, పేదవారు, ముసలివారు సంఖ్యలను తెలిపే దత్తాంశం.

2) ప్రభుత్వ చౌక దుకాణంలో స్టాకును తెలిపే పట్టిక.

3) భారతదేశంలోని వివిధ రకాల కార్ల ఉత్పత్తి.

4) ఒక సాధకం (కూర) తయారుచేయుటకు అవసరమగు పదార్థముల భారములు.

5) వరుస సంవత్సరాలలో ఒక ప్రాంతము నందు వర్షపాతము.

దత్తాంశములోని రాశులన్నింటిని కలిపి 1 ప్రమాణముగా లెక్కించినపుడు అందులోని ఒక రాశి పరిమాణములోని హెచ్చుతగ్గులు మిగిలిన రాశులను ప్రభావితం చేయునపుడు వృత్త రేఖా చిత్రమును ఉపయోగిస్తాము. వృత్త రేఖాచిత్రంలోని అన్ని విభాగములు (Sectors) యొక్క కోణముల మొత్తం ఒక సంపూర్ణ కోణము అనగా $360^0$ అని గ్రహించాలి.

## కమ్మీరేఖాచిత్రానికి, వృత్తరేఖా చిత్రానికి భేదమేమి?

కమ్మీ రేఖాచిత్రాలలో కమ్మీల పొడవులను పోల్చుతాము. కానీ అవి ఒకదానిపై ఒకటి ఆధారపడవు. వృత్త రేఖా చిత్రంలో ప్రతి విభాగము అది ప్రకటించే రాశి పరిమాణము మొత్తం దత్తాంశములో ఎన్నవ భాగం (ఎంత భిన్నం) అని తెలియజేస్తుంది. కావున ఒక రాశి పరిమాణంలో మార్పు మిగిలిన రాశులను చూపు విభాగములపై కూడా ప్రభావం చూపుతాయి.

కింది వాటిలో ఏయే దత్తాంశములను కమ్మీరేఖా చిత్రములుగా లేక వృత్త రేఖా చిత్రములుగా చూపవచ్చునో పరిశీలించండి.

1) ఒక గ్రామములోని వివిధ పంటల ఉత్పత్తి.

2) ఒక విద్యార్థి వివిధ విషయాల పరీక్షలలో సాధించిన మార్కులు.

3) ఒక వ్యక్తి ఆదాయంలో వివిధ అంశాల వ్యయమునకు కేటాయింపు.

4) ఆంధ్రప్రదేశ్ బడ్జెట్‌నందు వివిధ అంశములకు కేటాయింపు.

5) ఒక పాఠశాలలో వివిధ తరగతుల విద్యార్థుల సంఖ్య.

## విశ్లేషణకు ఉపయోగించు రేఖాచిత్రాలు :

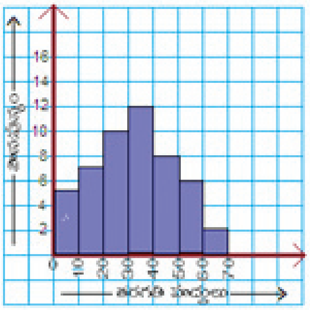
వర్గీకృత దత్తాంశమును సూచించుటకు వివిధ రకాలయిన రేఖాచిత్రములను ఉపయోగిస్తాము. సోపాన చిత్రం (histogram), పౌనఃపున్య బహుభుజి (frequency polygon). పౌనఃపున్య వక్రము (frequency curve) పై మూడు రేఖాచిత్రముల దత్తాంశములో

వివిధ స్థాయిలలో (అంతరాలలో) రాశుల పౌనఃపున్యాలను అనుపాతములో ప్రదర్శించినప్పటికి, వాని వినియోగంలో ఒకదాని తరువాత మరొకటి ఎక్కువ ఖచ్చితత్వాన్ని కలిగి ఉంటాయి.

| తరగతి అంతరాలు | పౌనఃపున్యం |
|---|---|
| 0 – 10 | 5 |
| 10 – 20 | 7 |
| 20 – 30 | 10 |
| 30 – 40 | 12 |
| 40 – 50 | 8 |
| 50 – 60 | 6 |
| 60 – 70 | 2 |

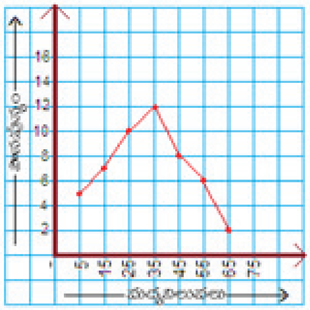
పౌనఃపున్య విభాజనం

**పటం – 7**



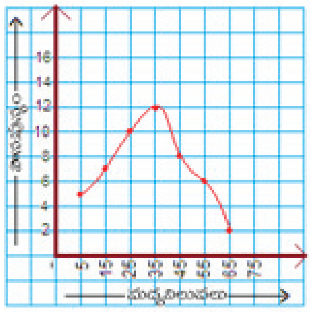
పౌనఃపున్య సోపాన చిత్రం

**పటం – 8**



పౌనఃపున్య బహుభుజి

**పటం – 9**



పౌనఃపున్య వక్రం

**పటం – 10**

**మీరు ఇది గమనించారా?**

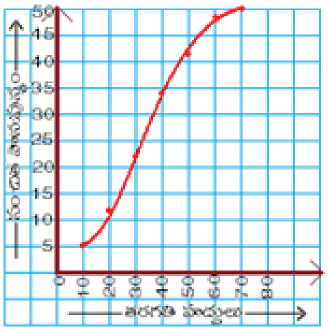
పట చిత్రాలు కమ్మీరేఖాచిత్రాలు, వృత్తరేఖా చిత్రాలలో ఒక దత్తాంశములోని వివిధ రకాల రాశులను సూచిస్తాము. కానీ సోపాన చిత్రం, పౌనఃపున్య బహుభుజి లేక వక్రములలో ఒకే రకమైన రాశులకు సంబంధించి వివిధ తరగతి అంతరాలలో (స్థాయిలలో) పౌనఃపున్యములను సూచిస్తాము.

కమ్మీరేఖా చిత్రములలో కమ్మీలు విడివిడిగా ఉంటాయి. సోపాన చిత్రంలోని కమ్మీలన్నీ ఒకదానికొకటి అంటుకొని ఉంటాయి ఎందుకు? సోపాన చిత్రాలలోని కమ్మీల వరుసను మార్చవచ్చునా? దత్తాంశమునందు వివిధ స్థాయిలు (తరగతి అంతరాల వరుస ఎగువ హద్దులు / దిగువ హద్దులు) వద్ద రాశుల పరిమాణముల మధ్య పరస్పర సంబంధము (ఎక్కువ / తక్కువ / ఎక్కువ మార్పురేటు / తక్కువ మార్పురేటు) తెలుపుటకు సంచిత పౌనఃపున్య వక్రములను ఉపయోగిస్తాము. ఇందు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు వరుస తరగతుల ఎగువ హద్దులతో, అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు దిగువ హద్దులతో సంబంధము కలిగి ఉంటాయి.

| తరగతి అంతరాలు | పౌనఃపున్యం | ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం | అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం |
|---|---|---|---|
| 0 – 10 | 5 | 5 | 50 |
| 10 – 20 | 7 | 12 | 45 |
| 20 – 30 | 10 | 22 | 38 |
| 30 – 40 | 12 | 34 | 28 |
| 40 – 50 | 8 | 42 | 16 |
| 50 – 60 | 6 | 48 | 8 |
| 60 – 70 | 2 | 50 | 2 |

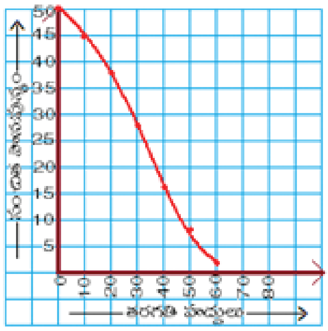
సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనం

**పటం – 11**



ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం

**పటం – 12**



అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం

**పటం – 13**

ఒక దత్తాంశమునకు ఆరోహణ మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను ఒకే రేఖాచిత్రంలో గుర్తించినపుడు వాని ఖండన బిందువు ఆ దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును తెలుపుతుంది.

**గమనిక :**

వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క బాహుళకము ఆ దత్తాంశంలోని గరిష్ట పౌనఃపున్యంగల తరగతిలో ఉంటుందని ఊహిస్తాము. అందువల్ల దత్తాంశము యొక్క సోపాన చిత్రంలో గరిష్ట ఎత్తుగల సోపానంలో బాహుళకమును లెక్కిస్తాము. కానీ దాని ప్రాథమిక దత్తాంశమును పరిశీలించినప్పుడు కనుగొన్న బాహుళకము అసత్యమయ్యే అవకాశం కలదు. మరికొన్ని వివరాలకై పాఠ్యపుస్తకాలను చదవండి, విద్యార్థులచే చదివించండి.

# ఉ) క్షేత్రమితి – అభ్యసన ఆధార పత్రం

## (Approach paper on Mensuration)

మానవ దైనందిన జీవితములో ఆహారం, వస్త్రం, నివాసం ప్రాథమిక అవసరములు. వీటిని కొలిచేందుకుపయోగించేవి ప్రాథమిక కొలతలు. ఆహారం నిల్వచేసే పాత్రయొక్క ఘనపరిమాణము తెలుసుకోవాలన్న, మనం నివసించడానికి అనువైన ఇండ్లని నిర్మాణము చేయాలన్న, వివిధ రకముల వస్త్రములను ధరించాలన్న వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము అను భావనలను గూర్చిన జ్ఞానమును మనము పొందియుండాలి. ఇంతటి ప్రాముఖ్యత కల్గిన, ఆవశ్యకత కల్గిన అంశమును 7,8 మరియు 9వ తరగతులలో పాఠ్యాంశములుగా పొందు పరిచారు. 7వ తరగతిలో దీర్ఘచతురస్రము, చతురస్రము, త్రిభుజము మరియు వృత్తాకార ఆకృతులలో యున్న వస్తువులు లేదా స్థలముయొక్క వైశాల్యము, పరిధి (చుట్టుకొలత)లను ఏవిధముగా కనుగొనాలి, ఈ భావనల యొక్క అన్వయం నిత్యజీవితములో ఏవిధముగా ఉంటుంది అనుఅంశములను పరిశీలించడము ద్వారా అవగాహన చేసుకొని వాటిని సూత్రీకరణ చేయడం జరిగింది.

8వ తరగతిలో "సమతల పటముల వైశాల్యములు" అను శీర్షికతో అధ్యాయము 9గా పరిచయము చేశాం. ఇంటి స్థలము దీర్ఘచతురస్రాకార ఆకృతిలో ఉండగా నిర్మాణము సులభము అదే సమలంబ చతుర్భుజ ఆకృతిలో ఉంటే ఏవిధముగా నిర్మాణము చేయవచ్చు అనే దైనందిన కృత్యమును ఆధారముగా చేసుకొని సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యమును సూత్రీకరణ చేశాము. ఒక కృత్యము ద్వారా గ్రాఫు కాగితముపై సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మింపచేసి, దానిని ఒక త్రిభుజముగా మలచి, ముందు తరగతిలో త్రిభుజవైశాల్యమును నేర్చుకొన్నాము, కనుక ఆ సూత్రమును ఆధారముగా చేసుకొని సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొన్నాము. ఈకృత్యములో "తెలిసిన విషయాలనుండి కొత్తవిషయం నేర్చుకోవడం" (Known to Unknown) అను సూత్రమునుపయోగించాము. సమలంబ చతుర్భుజాకృతిలోయున్న ఆటస్థలముయొక్క వైశాల్యమును కనుగొనేందుకు ఆ ఆటస్థలమును దీర్ఘచతురస్రము మరియు రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి, వాటివైశాల్యములను కనుగొని, వాటిని కూడి సమలంబ చతుర్భుజాకృతిలోయున్న ఆటస్థలము వైశాల్యమును కనుగొన్నాము. ఈ మూడు సందర్భములలో వైశాల్యములను కనుగొని మూడు ఒకే విధమైన సూత్రము నిస్తున్నట్లుగా చూపి సూత్రమును "సామాన్యీకరణము" చేశారు. సూత్రమును, భావనను బలపరిచేందుకు, అవగాహన చేసుకొనేందుకు 6 ఉదాహరణ సమస్యల ద్వారా వివరించడం జరిగింది.

చతుర్భుజవైశాల్యం "త్రిభుజీకరణ" పద్ధతిద్వారా కనుగొనే విధానము వివరించి, ప్రయత్నించండి అను శీర్షిక ద్వారా సమాంతర చతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజములుగా విభజించి వైశాల్యమును కనుగొనమని, ఈ రెండు సందర్భములలో చతుర్భుజ వైశాల్యములను సరిపోల్చి, అ భావనను సూత్రీకరణ చేశాము. సమచతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనే విధానమును 7వ తరగతిలో వివరించననూ, మరోసారి 8వ తరగతిలో వివరించడము జరిగింది.

మన నిత్య జీవితములో వ్యవసాయభూములు, నివాసభూములు యొక్క వైశాల్యముల ఆవశ్యకత ఎంతైనా వుంది. బహుభుజి ఆకృతిలో ఉన్న పొలంను దీర్ఘచతురస్రం, త్రిభుజము మొదలగు సమతల పటములుగా విభజించి వాటి వైశాల్యములను కనుగొని వాటిని కూడి పొలము వైశాల్యమును కనుగొనే విధానము సచిత్రముగా వివరించబడింది. నిత్యజీవితంలో గణిత ఆవశ్యకతను, ప్రాముఖ్యతను ఈ అంశము ఎంతగానో బలపరుస్తుంది. ఒక సర్వేయరుకు ఈ అంశముపై పట్టు ఎంతైనా అవసరము. దీనిపై నైపుణ్యము సాధించిన వారు దీనిని ఒక వృత్తిగా స్వీకరించి జీవనము సాగించడము మనం చూస్తూనే ఉన్నాం.

వృత్తము రేఖాఖండములచే నిర్మింపబడదుకనుక దానిని ముందుగా గ్రాఫు కాగితముపై నిర్మించి లేదా గీచి దానివైశాల్యమును కనుగొన్నాము. కాని ఇది ఖచ్చితమైన వైశాల్యమునివ్వదు కనుక వృత్తమును 8 సమానభాగములుగా మడిచి, కత్తిరించి ఆ సెక్టరులను ఒక క్రమపద్ధతిలో ఏర్పరిస్తే ఒక సమాంతర చతుర్భుజమును పోలి ఉంటుంది. ఈ సందర్భములో కూడా వైశాల్యం

ఖచ్చితత్వము కల్గి ఉండదు కనుక వృత్తమును 64 భాగాలుగా కత్తిరించి వాటిని అమర్చి ఒక దీర్ఘచతురస్రముగా ఏర్పరచి వైశాల్యమును కనుగొని ఆ భావనను సూత్రీకరణ చేశాము. ఈ సూత్రమును 'ఏ బుక్ అఫ్ జ్యూస్' లో వివరించిన ఒక కృత్యము ద్వారా పరిశీలించి, సత్యమని ఋజువు అయిన తరువాత సామాన్యీకరించాము. ఈ విధముగా ఒక భావనను వివిధ కృత్యముల ద్వారా పరిశీలించి, సామాన్యీకరణ చేయుట ద్వారా విద్యార్థులలో మరియు ఉపాధ్యాయులలో దోషరహితమైన, అవగాహనపూరితమైన భావనలను పెంపొందించడానికి కృషిచేశాము. చివరగా ఈ అధ్యాయములో అర్ధవృత్తవైశాల్యము, బాట లేదా కంకణాకారస్థల వైశాల్యములను గూర్చి కూడా చర్చించాము. జాతీయస్థాయి పోటీ పరీక్షలకు సన్నద్ధమయ్యే విద్యార్థుల కొరకు కొన్ని సంక్లిష్ట సమస్యలను కూడా వివరించి వాటిని ప్రాక్టీసు చేసేందుకు, అవగాహన చేసుకొనేందుకు మరికొన్ని సమస్యలను అభ్యాసములో ఇవ్వడము జరిగింది.

9వ తరగతిలో విద్యార్థుల అవగాహనస్థాయి కాస్త మెరుగుగా ఉంటుంది కనుక కొన్ని ద్విపరిమాణాత్మక వస్తువులను, త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువులనిచ్చి వాటిని వర్గీకరింపచేసి త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువులు అయిన స్థూపము, శంఖువు, గోళము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యములు, సంపూర్ణతల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములను ఏవిధముగా కనుగొందురో ఆ విధానములను వివరించి, వివిధ కృత్యముల ద్వారా ఆ భావనలను అవగాహన చేసేందుకు కృషి చేశాము. ఘనపరిమాణము, సామర్థ్యము అను భావనల మధ్య పోలికలు, వ్యత్యాసములను వివరించి, అవి ఏసందర్భాలలో ఒకటిగా ఉంటాయి. ఏసందర్భాలలో భిన్నముగా ఉంటాయో వివరించడము జరిగింది.

దీర్ఘఘనాకృతిలో యున్న ఒక అట్టపెట్టెను తీసుకొని పరిశీలింపజేసి ఎన్ని ముఖాలు, ఎన్ని మూలాలు, ఎన్ని అంచులు కల్గియుందో విద్యార్థులచే చెప్పించి, ఏ ముఖాల జతలు ఒకే పరిమాణము కల్గి యున్నాయో పరిశీలింపజేసి దాని ఆధారముగా అంచుల వెంబడి కత్తిరించి దీర్ఘఘనము యొక్క ప్రక్కతలవైశాల్యము, సంపూర్ణతలవైశాల్యము కనుగొనే విదానము వివరించబడింది. ఈ భావన స్థిరీకరణకు "ఇవి చేయండి" అనుశీర్షిక ద్వారా సమస్యాసాధనలు ఇయ్యబడ్డాయి. ఘనపరిమాణము, సామర్థ్యము అనే భావనలు చాలా పోలికలు, కొద్దిపాటి వ్యత్యాసములు కల్గియున్నాయి. వాటిని విపులముగా విశదీకరించి ఒక కృత్యముద్వారా ప్రదర్శించబడింది. దీర్ఘఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును ఒక కృత్యము ద్వారా పరిశీలింపచేసి సూత్రమును సామాన్యీకరణము చేయబడింది. దీర్ఘఘన పరిమాణమునుండి సమఘనపరిమాణము ఉత్పాదించబడింది.

ప్రపంచ ఏడు వింతలలో ఒకటైన పిరమిడ్‌ను గూర్చి తెలుసుకోవాలన్న ఆసక్తి ఎవ్వరికైనా ఉంటుంది. గణితపరముగా పిరమిడ్ అంటే ఏమిటి? దానియొక్క లక్షణములు ఏమిటి? పట్టకము, పిరమిడ్ అను భావనల మధ్య వ్యత్యాసములేమిటీ? అను ప్రశ్నల ద్వారా మేధోమధనము చేసి పట్టకముయొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనే విధానము వివరించబడింది. భూమి, ఎత్తు సమానముగాగల ఘనమును, చతురస్రాకార పిరమిడ్‌ను తీసుకొని ఒక కృత్యము ద్వారా ఘనపరిమాణమును కనుగొని నేర్చుకొన్న సూత్రమును స్థిరీకరణ చేయుట జరిగింది.

అభ్యాసములోని సమస్యలు కూడా చాలా వరకూ నిత్యజీవితములోని సంఘటనలకి అనుసంధానం అయ్యే పదసమస్యలు (Word Problems) ఇవ్వబడ్డాయి. స్థూపము అనే భావనను చర్చించి, స్తూపమును ఏవిధముగా నిర్మించవచ్చో వివరించి ఆ నిర్మాణక్రమమును ప్రక్కతల వైశాల్యము, సంపూర్ణతలవైశాల్యము కనుగొనుటలో "అన్వయించి" సూత్రీకరణ చేయబడింది. ఈవిధముగా 5 విద్యాప్రమాణాలను సముచిత రీతిలో ఉపయోగించి, అన్వయించి పుస్తక రచన చేయబడింది.

ఒక కృత్యం ద్వారా స్థూపం ఘనపరిమాణం కనుగొని, దాన్ని అభివృద్ధి చేసే విధానము విద్యార్థులలో "పనిద్వారా నేర్చుకోవడం" అను వైఖరి పెంపొందించును మనము నిత్యము చూస్తూ ఉండే, దైనందిన చర్యలో తరచుగా మనకు కనబడే శంఖువు ఆకృతిని పోలి యుండే 'బతుకమ్మ', బొంగరం, క్యారెట్, ముల్లంగి, ఐస్‌క్రీం మున్నగు వస్తువులను గూర్చి ఆసక్తి ఉంటుంది. అందుకు 9వ తరగతిలో ఉపరితలవైశాల్యము ఘనపరిమాణము అధ్యాయములో శంఖము అనే భావన గూర్చి వివరించబడింది. ఒక కృత్యము ద్వారా శంఖువును నిర్మించేవిధానము, ఆవిధాన క్రమసోపానములు ఆధారముగా చేసుకొని శంఖువు ప్రక్కతలవైశాల్యము లేదా వక్రతల వైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొనే విధానము వివరించబడింది.

క్రమ వృత్తాకారస్థూపమును, శంఖువును తీసుకొని ఒక కృత్యము ద్వారా రెండు ఘనపరిమాణములను సరిపోల్చి, పోలిక ద్వారా ఘనపరిమాణమును కనుగొనడము జరిగింది. వృత్తము ద్విమితీయము, గోళము త్రిమితీయ అనే భావనపై స్పష్టత కల్గించి, గ్లోబు, ఫుట్‌బాల్, పిల్లలు ఆడుకునే బంతి, మనము ఇష్టముగా తినే 'లడ్డూ' లను పరిశీలింపచేసి గోళము త్రిమితీయ వస్తువు అనే భావనను స్థిరీకరింపజేసి ఒక కృత్యముద్వారా గోళము భావనను ప్రదర్శింపజేసి వివరించడమైనది. ఒక కృత్యము ద్వారా గోళము ఘనపరిమాణము కనుగొని దాని ఆధారముగా అర్ధగోళము యొక్క ఘనపరిమాణము కనుగొనే విధానముకూడా వివరించడమైనది.

కృత్యఆధారిత, సమకాలిన, పరిసరాలలోయున్న వస్తువుల పరిశీలనద్వారా భావనలను రూపొందించి, ఆభావనల అవగాహనలో స్పష్టతకోసం 'ఇవిచేయండి', "మీరు ఏమి గమనించారు?" "చర్చించండి" అను శీర్షికల ద్వారా అభ్యాసనము ఇచ్చి ఆలోచింపజేసి, అభ్యాసములలో భిన్న స్థాయిలలో విద్యాప్రమాణాలను చూపించి ఇచ్చిన సమస్యలును సాధింపజేసి చివరగా 'మీరు ఏమి నేర్చుకున్నారు' అను శీర్షికతో పునఃశ్చరణ చేయుట జరిగింది.

సమస్యాసాధన, స్వీయ అన్వేషణ, అంచనా, రమారమి విలువపొందడం, ఆవర్తనా క్రమాలు (Successive Patterns), ఊహాచిత్రాలు వేయగలగటం, సరియైన గుర్తులు, అక్షరాలు వాడుతూ సమస్యను లేదా సాధనను చెప్పటం (Representation), తార్కిక విచారణ, ఋజువు చేయడం వంటి అనేక గణిత పద్ధతులకు వీలు కల్పించే అభ్యసన వాతావరణం తరగతి గదిలో ఉండాలి.

– SCF 2011

# ఊ) క్షేత్రమితి – అధ్యయన అవగాహనపత్రం

✦ **పరిచయం :**

ద్విపరిమాణాత్మక వస్తువులు, త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువులను రెండు గ్రూపులుగా చూపి వాటిని పరిశీలించి, గుర్తించమనడం.

✦ **దీర్ఘఘనము ఉపరితలవైశాల్యము :**

- ప్రక్కతల వైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొని సూత్ర రూపకల్పన.
- కృత్యము ద్వారా సమఘన ప్రక్కతలవైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొనుట.

✦ **ఘనపరిమాణము :**

- భావనను కృత్యము ద్వారా వివరించుట.
- పాత్రయొక్క సామర్థ్యము అనే భావనను నేర్చుకొంటారు.
- దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము కనుగొనేవిధానం, సూత్రీకరణ.
- దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం నుండి సమఘన ఘనపరిమాణ సూత్ర ఉత్పాదన.
- దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం సూత్రము నుపయోగించి క్రమ పట్టకము యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనుట.
- పిరమిడ్ యొక్క ఘనపరిమాణమునకు సూత్రీకరణ.
- పిరమిడ్ ఘనపరిమాణము కనుగొనేందుకు కృత్యము.

✦ అభ్యాసము 10.1లో దీర్ఘఘన, సమఘన ప్రక్కతలవైశాల్యము, సంపూర్ణతలవైశాల్యములు దీర్ఘఘన, సమఘన, పిరమిడ్, పట్టకపు ఘనపరిమాణములపై సమస్యలు ఇయ్యబడినవి. చివరగా సామర్థ్యము పై ఒక ప్రశ్న ఇయ్యబడింది.

✦ **క్రమ వృత్తాకార స్థూపం :**

- కృత్యము ద్వారా స్థూప భావనను పెంపొందించడం.
- క్రమస్థూపంలు అయినవి, కానివాటిని గుర్తించడం.
- స్థూపము యొక్క ప్రక్కతలవైశాల్యము సూత్రీకరణ – ఇవిచేయండి ద్వారా సమస్య సాధన.
- స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము సూత్రీకరణ – ఇవిచేయండి ద్వారా సమస్య సాధన.
- స్థూపము ఘనపరిమాణమును కృత్యము ద్వారా సూత్రీకరణ.
- 5 ఉదాహరణ సమస్యల ద్వారా స్థూపము ప్రక్కతలవైశాల్యము, సంపూర్ణతలవైశాల్యం, ఘనపరిమాణము అర్థము చేసుకోవడము.

✦ అభ్యాసము – 10.2లో స్థూపము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం, సంపూర్ణతల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణమునకు సంబంధించిన 11 సమస్యల సాధన అభ్యాసముగా ఇయ్యబడినది.

✦ కృత్యము ద్వారా శంఖువు భావనను కలిగించడం.

- **శంఖువు :**
  - కృత్యము ద్వారా శంఖువు భావనను కలిగించడం.
  - ప్రక్కతల వైశాల్యమును కృత్యము ద్వారా కనుగొని సూత్రీకరణ చేయడం.
  - సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కృత్యము ద్వారా కనుగొనే సూత్రీకరణ చేయడం.
  - ఇవిచేయండి లో ప్రక్కతల, సంపూర్ణతలవైశాల్యమునకు సంబంధించి రెండు సమస్యలు.
  - శంఖువు ఘనపరిమాణంను కృత్యము ద్వారా కనుగొని, సూత్రీకరణ చేయడం.
  - 4 ఉదాహరణల ద్వారా ప్రాక్టీసుచేయడం
- అభ్యాసము 10.3లో శంఖువు యొక్క ప్రక్కతలవైశాల్యం, సంపూర్ణతలవైశాల్యము, ఘనపరిమాణమునకు సంబంధించిన 12 సమస్యలు ఇయ్యబడ్డాయి.
- **గోళం :**
  - మన చుట్టూ ఉన్న, మనము ఉపయోగిస్తున్న ఆకృతులనుండి గోళమును గుర్తించి గోళము భావనను పెంపొందించడం (పరిచయం).
  - గోళము ఉపరితలవైశాల్యమును కృత్యము ద్వారా కనుగొని సూత్రీకరణ చేయడం.
  - అర్ధగోళము ఉపరితలవైశాల్యం, సంపూర్ణతలవైశాల్యము భావనను పెంపొందించుకోవడం, వాటి సూత్రీకరణ.
  - గోళం ఘనపరిమాణమును కృత్యము ద్వారా కనుగొనడం.
- అభ్యాసము 10.4లో గోళము యొక్క ఉపరితలవైశాల్యం, ఘనపరిమాణముల 12 సమస్యలు ఇవ్వబడ్డాయి.
- మనం ఏమి నేర్చుకున్నాం ద్వారా పునఃశ్చరణ.

బడి లోపలి గణితం, బడి బయట గణితంల మధ్య ఉండే అనేక రకాలైన అనుసంధానాలు (links) పిల్లలు అన్వేషించి తెలుసుకొనేలా చేస్తే వారిలో సహజసిద్ధ గణితీకరణ పద్ధతి (Natural Mathematization Process) వేళ్ళూనుతుంది.

– SCF 2011

# అధ్యాయం - 6

# ఉపాధ్యాయుని సంసిద్ధత

## (Teacher Preparation)

నూతన సిలబస్‌కు అనుగుణంగా రూపొందిన పాఠ్యపుస్తకములలోని నిర్దేశించిన విద్యాప్రమాణములను సాధనకోసం (దృష్టిలో ఉంచుకొని) భోధనాభ్యసన విధానములో మార్పులు చేసుకోవలసిన అవసరము ఉన్నది. ప్రతి ఉపాధ్యాయుడు సిలబస్, విద్యాప్రమాణములకు అనుగుణంగా అధ్యాయాలను నిశితంగా అభ్యసనం చేసుకొని, తగిన బోధనావ్యూహాలు ఏర్పాటుచేసుకోవాలి.

- సంసిద్దత అనేది తరగతి గదిలో జరిగే బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలకు కీలకమైనది.
- విద్యార్థులందరిని భాగస్వాములుగా చేస్తూ ప్రక్రియలు కొనసాగించడం సంసిద్ధతకు ఆధారము అవుతుంది.
- విద్యార్థులలో కలిగే మార్పులకు నిరంతరం అంచనా వేస్తూ సమగ్రమూల్యాంకనము ద్వారా వారి సామర్థ్యాలను పెంపొందించడం, వారు సంసిద్ధులయ్యారనడానికి మరో ఆధారము.

**ఆలోచించండి :**

- *గణిత బోధనాభ్యసన ప్రక్రియ సహజసిద్ధమైనదా? కృత్రిమైనదా?*
- *గణిత శాస్త్ర స్వభావం, పిల్లల స్వభావంనకు అనుగుణంగా బోధన జరుగుతున్నదా?*
- *బోధనా విధానాలలోనూ, అభ్యసన ప్రక్రియలలో కలిగే మార్పులు ఉపాధ్యాయులంతా గ్రహిస్తున్నారా?*
- *ఉపాధ్యాయుడు తరగతిలో చెప్పే గణితాన్ని బట్టే పిల్లలు సమస్యలు నేర్చుకుంటున్నారా?*
- *పిల్లలు స్వయం అనుభవాల ద్వారా కూడ గణితభావనలు పొందుతున్నారా?*
- *గణితం బోధించుట ద్వారా విద్యార్థులలో కలిగే మార్పులు ఏవి?*
- *నేర్చుకున్న గణితాన్ని పిల్లలు వారి నిత్యజీవిత సన్నివేశాలలోను, సందర్భాలలోను వినియోగించుకోగలుగుతున్నారా?*
- *ఎందుకొరకు సమర్ధవంతంగా వినియోగించుకోలేకున్నారు?*
- *గణిత అభ్యసనలో విద్యాప్రమాణాలు తగ్గిపోతున్నాయి అనే భావన తరచుగా చర్చలలో వినిపిస్తుంది. ఎందుకు? గణిత పాఠ్యపుస్తకాలలో, అంశాల అమరికలో లోపమా? తరగతి గది బోధనలో లోపమా! విద్యార్థుల అవగాహనా లోపమా?*

మన రాష్ట్ర విద్యాప్రణాళికా చట్రం - 2011లో పై అంశాలను సుదీర్ఘముగా చర్చించిన తర్వాత, విద్యాప్రణాళికా మొదలు తరగతి గది బోధనావిధానంలో మార్పుల వరకు అనేక సూచనలు, సలహాలు పొందుపర్చింది. ఈ నేపధ్యంలో నూతన పాఠ్యపుస్తకాల రూపకల్పన జరిగింది. సమాజంలో క్రమానుగతంగా వచ్చిన మార్పులకు అనుగుణముగా విద్యార్థుల అవసరాల రీత్యా తరగతి గదిలో విద్యార్థులంతా అభ్యసన ప్రక్రియలో భాగస్వాములు కావల్సియున్నది. కావున బోధనా విధానములో మార్పులు అవసరం. అందుచే ప్రస్తుతం అవలంభిస్తున్న బోధనావిధానం ఒకసారి పరిశీలించి, నూతన పాఠ్యపుస్తకాలలో చేపట్టిన మార్పులకు అనుగుణంగా మరింత మెరుగైన విధానాన్ని అవలంబించవలసి వున్నది.

**నూతన పాఠ్యపుస్తకంలో మార్పులు :** మొదట మనం నూతన పాఠ్యపుస్తకంలలో చోటు చేసుకొన్న మార్పులు గమనిద్దాం.

8,9 తరగతులకు నిర్దేశించిన సిలబస్‌ను రంగాల వారీగా విభజించుకొని ప్రతీరంగం యొక్క ప్రాధాన్యతను దృష్టిలో ఉంచుకొని వివిధ అధ్యాయాలుగా విభజించబడినాయి.

| | | |
|---|---|---|
| **8వ తరగతి** | **:** | **15 అధ్యాయాలు** |
| **9వ తరగతి** | **:** | **15 అధ్యాయాలు** |

**పిల్లలు స్వయంగా నేర్చుకోవడమేగాక ఇతర పిల్లలలో కృత్యాలలో పాల్గొనడం ద్వారా కూడ నేర్చుకుంటారు -**
SCF - **2011**

- నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనము దృష్టియందుంచుకొని వార్షికప్రణాళికలో ప్రతీదశలో వివిధ రంగాలకు (అంకగణిత, బీజగణిత, క్షేత్రగణిత, సాంఖ్యకశాస్త్రం, .....) చెందిన అధ్యాయాలను మిళితం చేయడం జరిగినది.
- ప్రతి అధ్యాయంలో విద్యార్థుల పూర్వజ్ఞానాన్ని పరిశీలించి, వారి అనుభవాల ద్వారా, నిత్యజీవిత సంఘటన ఆధారంగా పరిచయం ప్రవేశపెట్టబడినది.
- అధ్యాయాన్ని చిన్న చిన్న ఉప అంశములుగా విభజించి, చర్చాపద్ధతిలో విద్యార్థులను భాగస్వామ్యం చేసే విధంగా సమస్యలు ఇవ్వబడినవి.
- ప్రతి అంశములో విద్యార్థి అవగాహన వెంటనే తెలుసుకొనుటకు "ఇవి చేయండి" శీర్షికతో అభ్యాసం ఇవ్వడం జరిగినది.
- చర్చలో, మధ్యన విద్యార్థి యొక్క తార్కిక ఆలోచనలకు, వివిధ రంగాలతో సహసంబంధము ఏర్పరచుటకు "ప్రయత్నించండి" అనే శీర్షికలో కొన్ని సమస్యలు ఇవ్వబడినవి.
- విద్యార్థులలో ఆలోచనాశక్తి పెంపొందిచుటకు, హేతుబద్దంగా చర్చించి విశ్లేషణా సామర్థ్యం కల్గించు నిమిత్తం "ఆలోచించి, చర్చించి, వ్రాయండి" శీర్షిక ఇవ్వబడినది.
- పై ప్రక్రియద్వారా నూతన సమస్యలు రూపొందించడానికి అవకాశం ఏర్పడుతుంది.
- బోధనాభ్యసన ప్రక్రియ విజయవంతముగా కొనసాగాలంటే "బోధనాభ్యసన సామగ్రి" ప్రాముఖ్యత చాలా కలదు.
- అధ్యాయాలలో పొందుపరచిన వివిధరకాల శీర్షికల ద్వారా విద్యార్థులలో పరస్పర సహకారం, బృందచర్చలకు అవకాశం కల్గుతుంది.
- పాఠ్యపుస్తకంలో ఇవ్వబడిన గణితశాస్త్రజ్ఞుల చరిత్ర, తమాషాలెక్కలు, గణితంతో ఆడుకుందాం మొదలైనవి, గణిత అధ్యయనం పట్ల అభిరుచి పెంపొందించడానికి దోహదపడతాయి.

ప్రస్తుత బోధనా విధానంను రేపు మనం నూతనపాఠ్యపుస్తకాల ఆధారంగా చేపట్టబోయే బోధనా విధానంనకు స్పష్టమైన తేడాలు గమనించవచ్చును. అందువలన ప్రతి గణిత ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతి గదిలో బోధనావ్యూహాన్ని అనుసరించడానికి ముందు ప్రతి అధ్యాయంను సమగ్రంగా అధ్యయనం చేయాలి. విద్యార్థులను ఎన్ని విధములుగా చర్చలలో, కృత్యాలలో, సూత్రీకరణలో భాగస్వాములను చేయగలమో ఆలోచించాలి. ఉపాధ్యాయుడు మార్గదర్శకుడుగా ఉంటూ, పిల్లలు స్వయంగా తమంతట తాముగా గణితాన్ని నేర్చుకొనే విధంగా ప్రోత్సహించాలి.

**ఆలోచించండి :**

**నూతన పాఠ్యపుస్తక సమగ్రపరిశీలన ద్వారా గతంలో లేని బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు ఏర్పాటుచేయడం జరిగినదో గమనించి, నూతన అభ్యసన ప్రక్రియ ఎందుకు అవసరమో ఆలోచించండి.**

తరగతి గదిలో ఆదర్శవంతముగా బోధనాభ్యసన ప్రక్రియకొనసాగించుటకు, నూతన పాఠ్యపుస్తకములకు అనుగుణంగా అనుసరించాల్సిన బోధనా వ్యూహాలలో క్రింది సోపానాలను ఏర్పాటు చేయవచ్చును.

**సోపానాలు :**

- చెప్పబోయే పాఠ్యాంశము / భావనలకు చెందిన పూర్వభావనలు / నిత్యజీవిత సందర్భాలు / చర్చించడంద్వారా సంసిద్ధులును చేయడం.
- భావనలు / సందర్భాలు / ఉదాహరణ చదివించడం / పరిశీలించడం ద్వారా వివరిస్తూ అవగాహన కల్పించాలి.
- జట్లలో స్వంతంగా ఉదాహరణను పరిశీలిస్తూ చర్చింపచేసే పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం తెలుసుకొనేలా చేయడం.
- గ్రూపులలో / స్వంతంగా ప్రయత్నించండి, ఇవి చేయండి శీర్షికలో ఇచ్చిన సమస్యలు సాధించడం.
- తప్పులను గుర్తింపచేయడం, చర్చింపజేయడం ద్వారా స్వంతంగా తప్పులను సరిదిద్దుకునేలా చేయడం.
- 'ఇవి చేయండి' శీర్షికలోని సమస్యలు / అభ్యాసాలు / అదనపు సమస్యలు / స్వంతంగా సాధింపచేయడం.
- విద్యార్థులు ఏవి సరిగా చేయగల్గుతున్నారో, తెలుసుకోడానికి మూల్యాంకనం నిర్వహించడం.

> "పరస్పర సంగతాలైన స్వీకృతాల నుంచి తప్పనిసరిగా ఉత్పన్నయ్యే ఫలితాల సమగ్రచర్చ "
>
> – బెర్నాండ్ రసెల్

**స్వీయ ప్రతిస్పందనలు :**

- ***8,9వ తరగతులలోని ఏదేని ఒక పాఠమును బోధించడానికి సోపానాలు తెల్పండి?***
- ***8,9వ తరగతులలోని ఏదేని ఒక పాఠమును తీసుకొని తరగతి కృత్యాలు / ఏవి జట్టుకృత్యాలు / ఏవి వ్యక్తిగత కృత్యాలు నిర్వహించాలో పట్టిక రాయండి.***

**ఉపాధ్యాయుల సంసిద్ధత – బాధ్యతలు :**

- ***ఉపాధ్యాయుడు తరగతిగదికి వెళ్లే ముందు ఎలా సంసిద్ధత కావాలి?***
- ***ఎలాంటి సామాగ్రిని సిద్ధము చేసుకోవాలి?***
- ***తరగతి గదిలోని పిల్లలందరూ అభ్యసన ప్రక్రియలో ఉత్సాహముగా పాల్గొనుటకు ఉపాధ్యాయుడు ఏమి చేయాలి?***
- ***తరగతి బోధన అనంతరము ఉపాధ్యాయుడు నిర్వహించవలసిన కార్యక్రమములు తెల్పండి?***

8, 9 తరగతులకు నూతన పాఠ్యపుస్తకాల గురించి ముందు అధ్యాయాలలో చర్చించుకున్నాము. ఎంతమంచి పాఠ్యపుస్తకమైన ఉపాధ్యాయునికి ధీటుకాదన్న విషయం మీకు తెలిసిందే. పాఠ్యపుస్తకంలపై స్పష్టమైన అవగాహన ఏర్పరచుకొని బోధనా లక్ష్యాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని పూర్తి సంసిద్ధతతో తరగతి గదిలో పిల్లలందరికి ఆశించిన విధంగా బోధనను చేపట్టాలి. ఇందుకోసం ఉపాధ్యాయులుగా మనం ఏఏ అంశాలలో సంసిద్ధతను కలిగి ఉండాలో ఈ అధ్యాయం ద్వారా తెలుసుకుందాం.

**ఉపాధ్యాయుల సంసిద్ధత :**

**1. పాఠ్యబోధన – సంసిద్ధత :**

- ప్రతి పాఠ్యాంశంలోని సామర్థ్యాలను అవగాహన చేసుకోవాలి.
- తరగతికి వెళ్లేముందు పాఠముపై, అభ్యాసంపై పూర్తి అవగాహన కలిగియుండాలి.
- అభ్యాసాలను బట్టి అవి వ్యక్తిగత, జట్టు, పూర్తి తరగతి పనులుగా చేపట్టాలి.
- పిల్లల స్థాయిలను గుర్తించి, A, B, C గ్రూపులుగా చేసి కృత్యాలపై అవగాహన కలిగించాలి.
- జట్టుపని గురించి తగు సూచనలు ఇవ్వాలి.

**2. బోధనాభ్యసన సామగ్రి – సంసిద్ధత :**

- బోధనాభ్యసన సామాగ్రి అనగానే ప్రతి ఉపాధ్యాయునికి, పిల్లలకు అందుబాటులో ఉండేవి చార్టులు, స్కేచ్‌పెన్నులు, గళ్ళకాగితంలు, వార్తాపత్రికలు మొదలుగునవి. వీనిని వినియోగించుకోవాలి.
- సాంఖ్యకశాస్త్రం, జ్యామితి.... మొదలైన అధ్యాయాలు బోధించేటప్పుడు వాటికి అవసరమైన రంగు రంగుల చిత్రాలను పేపర్లు, మ్యాగజైన్ల నుండి సేకరించాలి.

- **బోధనాభ్యసన సామగ్రి –**

| | |
|---|---|
| 1. చార్టులు | 9. రంగు కాగితములు |
| 2. జ్యామితీయ పెట్టె | 10. కత్తెరలు |
| 3. ఐసోమెట్రిక్‌గ్రాఫ్ | 11. స్కేల్ |
| 4. గళ్ళకాగితము | 12. చక్రం |
| 5. గ్రాఫ్‌పేపర్ | 13. అద్దం |
| 6. పాచిక | 14. ఏకరీతి మందము గల త్రాడు |
| 7. నాణెము | 15. మ్యాప్ |
| 8. ట్రేస్‌పేపర్ | 16. జ్యామితీయఘనాలు. |

**3. పిల్లల అభ్యసన సమయం సద్వినియోగం :**

- పిల్లలు తమ అభ్యసన సమయాన్ని పూర్తి స్థాయిలో సద్వినియోగపరచుకునేలా చూడాలి.
- పిల్లలందరు అభ్యసన కృత్యాలలో నిమగ్నులయ్యేలా చూడాలి.
- బోధనాభ్యసనకృత్యాలను చురుకుగా, ఉత్సాహంతో నిర్వహించాలి.
- పిల్లలకు విసుగు కలిగించకుండా జాగ్రత్త వహించాలి.

**4. ఉపాధ్యాయుల బాధ్యతలు :**

- ప్రతిరోజు నిర్ణీత సమయానికి తరగతిలోకి వెళ్లాలి, పూర్తి సమయం అభ్యసన ప్రక్రియ తర్వాతనే తరగతి నుండి బయటకు రావాలి.

- తరగతి గదిలో పిల్లలందరు పాల్గొనేటట్లు చూడాలి.
- అభ్యసనంలో చురుకుగా ఉన్నవారికి అదనపు కృత్యాలు నిర్దేశించుకుని ఉండాలి.
- చురుకైన పిల్లల ప్రతిభాపాటవాలను పూర్తిగా వినియోగించుకోవాలి.
- డైరీరాయాలి, పీరియడ్‌పథకాలు, యూనిట్‌పథకాలు, వార్షికపథకం సిద్ధంచేసుకున్న ఉపాధ్యాయుడు తరగతి గదిలో సత్ఫలితాలు సాధించడము తధ్యం.
- డైరీలో బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల ప్రణాళిక అమలు, పిల్లల అభ్యసన స్థాయిల ఆధారంగా స్వీయప్రతిస్పందనలు ఉండాలి.
- పిల్లల నోటు పుస్తకాలలోని అంశాలను వారితో చర్చింపచేసి దోషాలను స్వయంగా సరిదిద్దుకొనేలా చేయాలి.
- పాఠ్యాంశ మూల్యాంకనమునకు ముందే పథక ప్రశ్నపత్రం తయారుచేసుకోవాలి.
- మూల్యాంకనమునకు అవసరమయ్యే వర్క్‌షీట్స్ స్వయంగా రూపొందించాలి.
- పిల్లల స్థాయిని అంచనావేసి, వెనుకబడినవారికి తగిన అభ్యసనము కల్పించాలి.
- విద్యార్థుల ప్రగతి తల్లి తండ్రులకు నివేదించి, చర్చించాలి.

**స్వీయ ప్రతిస్పందనలు :**

1. ***9వ తరగతి "సంభావ్యత" పాఠాన్ని బోధించడానికి ఉపాధ్యాయుడిగా మీ సంసిద్ధత గూర్చి రాయండి?***

గణిత బోధనకు సన్నద్ధమయ్యే విధానంలో భాగంగా ఉపాధ్యాయులు తమ కన్న ఎక్కువ అనుభవం ఉన్న ఉపాధ్యాయుల తరగతులకు వెళ్ళి పాఠ్యబోధనను పరిశీలించాలి. అలాగే వారిని తమ పాఠ్యబోధనను పరిశీలించాలి. అలాగే వారిని తమ పాఠ్యబోధన పరిశీలనకై ఆహ్వానించాలి మరియు వారి సలహాలు సూచలు స్వీకరించాలి.

# అధ్యాయం – 7

# నిరంతర సమగ్రమూల్యాంకనం – అవగాహన

పిల్లలు బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో ఏ విధంగా పాల్గొంటున్నారు? ఏమేరకు భావనలపై అవగాహన పొందుతున్నారు? విద్యా ప్రమాణాల సాధనలో బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు ఫలవంత మయ్యాయా? మొదలగు అంశాలను తెలుసుకొనుటకు, లక్ష్యాలను నిర్ధారించుకోవడానికి మూల్యాంకనం అవసరం. ప్రస్తుతం పాఠశాలలో రెండు రకాలుగా మూల్యాంకనం నిర్వహిస్తున్నారు. అవి. 1. నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనం (Formative Evaluation) 2. సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం (Summative Evaluation) ఈ మూల్యాంకన విధానాల ద్వారా వేటిని మూల్యాంకనం చేస్తాం? ఎలా చేస్తాం? ప్రశ్నా పత్రాలు ఎలా రూపొందించు కొంటామో ఈ అధ్యాయంలో చర్చిద్దాం.

- *గణితంలో వేనిని మూల్యాంకనం చేయాలి? ఏ విధంగా చేయాలి?*
- *ఫార్మేటివ్ మూల్యాంకనం కోసం ఏయే అంశాలను దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి?*
- *ఏయే అంశాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని సమ్మేటివ్ మూల్యాంకనం నిర్వహిస్తాం?*
- *పిల్లల తప్పులను మనం ఎలా అర్థం చేసుకోవాలి. ఇవి మనకు బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల నిర్వహణలో ఎలా తోడ్పడుతాయి?*
- *ప్రశ్నా పత్రం తయారుచేసేటప్పుడు మనం దృష్టియందుంచుకోవల్సిన అంశాలు ఏవి?*

**గణితంలో వేటిని మూల్యాంకనం చేయాలి?**

గణిత బోధనాలక్ష్యాలను గమనిస్తే సంఖ్య, అంతరాళములకు సంబంధించిన అంశాలు అవగాహన చేసుకోవడం, గణితపరంగా ఆలోచన / చింతన చేయగల్గడం, ఊహించిన విషయాల నుంచి తార్కిక నిర్ణయాల వరకు అన్వేషణ కొనసాగించడం, అమూర్త భావనలను అర్థం చేసుకొని వాటిని సమర్థవంతంగా వాడగల్గడం, సమస్యా సాధన సామర్థ్యాలను పెంపొందించుకోవడం వంటివి దృష్టిలో ఉంచుకొని బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు నిర్వహించాలని మనకు తెలుస్తుంది. పై అంశాలను పరిశీలిస్తే పిల్లల్లో గణితంలోని వివిధ పాఠ్యాంశాల ద్వారా ప్రధానంగా కింద సూచించిన వాటిని సాధించాలని అవగతమవుతుంది. అవి:

1. సమస్యా సాధన (Problem Solving)
2. కారణాలు చెప్పడం – నిరూపణలు చేయడం (Reasoning - proof)
3. వ్యక్తపరచడం (Communication)
4. సంబంధాలు (Connection)
5. ప్రాతినిధ్యపరచడం – దృశ్యీకరణ (Representation - Visulization)

గమనిక : విద్యార్థులు ఒక తరగతిలో ఏమి చేయగల్గాలి? (మౌళిక ప్రక్రియలు) ఏమి తెలిసియుండాలి? (మౌళిక భావనలు) స్పష్టంగా వివరించే (అంశాలు) ప్రవచనాలను (Statements) ఆ తరగతి యొక్క విద్యా ప్రమాణాలు అంటారు.

**మూల్యాంకనం ఏ విధంగా నిర్వహించాలి?**

పిల్లల యొక్క అభ్యసనా ప్రగతిని అంచనా వేయుటకు మూల్యాంకనంలో భాగంగా నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనం (Formative Evaluation) సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం (Summative Evaluation) నిర్వహించాలి.

**నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనం (Formative Evaluation) :**

బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు నిర్వహిస్తున్నప్పుడు విద్యాప్రమాణాల సాధన ఎలా జరుగుతున్నది తెలుసుకోడానికి నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనం (Formative Evaluation) నిర్వహించాలి. నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనంలో ఉపాధ్యాయుడు పిల్లల ప్రగతిని అంచనా వేయడానికి ప్రధానంగా కింది సాధనాలు బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో వినియోగించాలి. అవి.

(1) పిల్లల భాగస్వామ్యం – ప్రతిస్పందనలు (Participation - Reflection) (2) పిల్లల రాత పనులు (Classwork, Homework, Portfolio's, Assignments etc...) (3) స్లిప్ టెస్ట్ (Slip Test) (4) పిల్లల ప్రాజెక్టుపనులు (Children Projects).

పై అంశాలను బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో భాగంగా నిర్వహించాల్సి ఉంటుంది తప్ప పరీక్షలాగా, నిర్ణీత సమయంలో, నిర్ణీత కాల వ్యవధిలో నిర్వహించడం జరగదు. అనగా పాఠ్యబోధన జరుపుతున్న సందర్భంలో పిల్లలతో చర్చించడం, కృత్యాలు నిర్వహించడం, ప్రశ్నలు అడగడం, బోర్డుపై లెక్కలిచ్చి చేయమనడం, ఇంటి పనికి లెక్కలు ఇచ్చి చేయమనడం, అప్పటికప్పుడు నాలుగు, ఐదు సమస్యలు ఇచ్చి సాధించమనడం చిన్న చిన్న స్లిప్ టెస్ట్‌లు నిర్వహించడం, అభిప్రాయాలు రాయమనడం, అసైన్‌మెంట్లు ఇచ్చి నివేదికలు సమర్పించమనడం, బొమ్మలు, సమాచారం సేకరింపజేయడం, ప్రాజెక్టులు నిర్వహింపజేయడం. మొదలగునవి చేస్తుంటాం. వీటన్నిటిని లెక్కలోకి తీసుకొని పిల్లల ప్రగతిని అంచనా వేసినప్పుడు మాత్రమే వారి అభివృద్ధికి, వారు నేర్చుకోవడానికి, వారిని మరింత అవగాహన చేసుకోవడానికి ప్రయత్నించినవారమవుతాం. ఇది అత్యావశ్యకం. పై అంశాలను నిశితంగా గమనిద్దాం.

1. **పిల్లల భాగస్వామ్యం – ప్రతిస్పందనలు (Participation - Reflection) :** (పిల్లల్ని ప్రశ్నించడం – చర్చించడం – ప్రశ్నింపజేయడం)

పాఠ్యాంశాలను బోధిస్తున్నప్పుడు పిల్లలు కృత్యాలలో ఎలా పాల్గొంటున్నారు? ఉపాధ్యాయుడు అడిగే ప్రశ్నలకు ఎలా జవాబులిస్తున్నారో పరిశీలించాలి. పిల్లలు భావనల అవగాహనకు ఉదాహరణ సమస్యలు సాధించడం ద్వారా సాధారణీకరణలు చేయడం, సూత్రీకరణ చేయడం, నిరూపణలు చేయడం చేస్తారు. ఇవి వారికి ఏమేరకు అవగాహన కల్గిందో తెలుసుకొనుటకు "ప్రయత్నించండి", "ఆలోచించండి – చర్చించండి" కృత్యాలు, సమస్యల ద్వారా తోటివారితో చర్చించడం, గ్రూపుల్లో చేయడం, అభిప్రాయాలు వెలిబుచ్చడం, నిర్ధారించడం వంటివి అందరు పిల్లలు చేయగల్గుతున్నారో లేదో పరిశీలించాలి. తద్వారా పిల్లల ప్రగతిని అంచనావేయాలి.

2. **పిల్లల రాత పనులు (Class work, Home work, Port folio, Assignments etc.) :**

పిల్లల రాత పనులలో భాగంగా నోటుబుక్కులు, హోంవర్కు కాపీలు, బోర్డుపై పిల్లలు సమస్యలు చేయడం, పాఠ్యపుస్తకాల్లోని పట్టికలు, సమస్యలు చేయడం, అసైన్‌మెంట్లు, పోర్టుఫోలియోలు పరిశీలించాలి. వీటిలో వీరు చేసిన లెక్కలు, సేకరించిన సమాచారం, వెలిబుచ్చిన అభిప్రాయాలు సరిగా రాశారా, గణిత విద్యాప్రమాణాలు ప్రతిబింబించే విధంగా ఉన్నాయా చూడాలి. అనగా బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలలో భాగంగా పాఠ్యాంశాలు, భావనలు, కృత్యాలు నిర్వహిస్తాం. ఉదాహరణలు సమస్యలు చెబుతుంటాము.

భావనలు, ఉదాహరణ సమస్యలు అవగాహన చేసుకున్న పిల్లలు "ఇవి చేయండి" లో ఉన్న సమస్యలు సొంతంగా తమ నోటు పుస్తకాలలో చేస్తున్నారా లేదా పరిశీలించాలి. అలాగే అభ్యాసాలలోని లెక్కలు నోటుపుస్తకాలలో తరగతిలో ఏ విధంగా చేస్తున్నారు, ఇంటి పనిని చేయగల్గుతున్నారా? లేదా పరిశీలించాలి. వాటితోపాటు పిల్లలకు ప్రాజెక్టుపని / అసైన్‌మెంటు మొదలగునవి ఇచ్చి వాటి ఆధారంగా వారు చేసి తప్పులను అర్థం చేసుకుంటూ, బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో మార్పుచేస్తూ, నూతన పద్ధతులను పాటిస్తూ, వారికి సలహాలు ఇస్తూ పిల్లలు ప్రగతిని నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనంలో భాగంగా అంచనావేయాలి.

3. **స్లిప్ టెస్ట్ (Slip Test) :**

స్లిప్ టెస్ట్ అనేది అప్పటికప్పుడు నిర్వహించేది. ఇందుకోసం ప్రత్యేకంగా పిల్లలకు తెలియజేసి ముందస్తుగా ప్రణాళికలో నిర్వహించాల్సిన అవసరంలేదు. సాధారణంగా నిర్వహించే బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల సమయంలోనే ఉపాధ్యాయులు స్లిప్‌టెస్టును

నిర్వహించవచ్చు. సబ్జక్టుకు సంబంధించిన ఏవైనా రెండు మూడు అంశాలు / భావనలు ఆధారంగా నిర్ధిష్టమైన విద్యాప్రమాణాలు / సామర్థ్యాలు సాధించడానికి, ఉద్దేశించబడింది. ఈ విధంగా ఒక యూనిట్ బోధనాసమయంలో స్లిప్‌టెస్టును నిర్వహించుకోవచ్చు.

**4. ప్రాజెక్టు పనులు (Projects Works) :**

బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల నిర్వహణ సందర్భంగా పనులు కేటాయించడం, ప్రాజెక్టుపనులు ఇవ్వడం చేస్తుంటాం. ప్రాజెక్టు పనిని పిల్లలకు గ్రూపులుగా చేసి లేదా వ్యక్తిగతంగాకాని ఇవ్వవచ్చు. ఇందుకోసం పిల్లలు క్షేత్రస్థాయిలో సమాచారాన్ని సేకరించడం, పట్టికల్లో నమోదుచేయడం, సమాచారాన్ని విశ్లేషించడం, అభిప్రాయాలను వ్యక్తపరచడం, బొమ్మలరూపంలో గ్రాఫులను ప్రదర్శించడం చేయాలి. వీటిని పరిశీలించిన ఉపాధ్యాయుడు ప్రాజెక్టుననుసరించి గ్రూపులలో గాని, వ్యక్తిగతంగాగాని విద్యార్థులతో చర్చించడం, ప్రశ్నించడం, వారు సమర్పించు నివేదికను పరిశీలించి విచక్షణతో, తగిన ఆధారాలతో పిల్లల ప్రగతిని అంచనావేయాలి.

### సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం :

సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం అనగా కొంత కాలంలో (పీరియడ్‌లో) నిర్దేశించిన పాఠ్యాంశాలలో పిల్లలు ఏమేరకు విద్యాప్రమాణాలు సాధించారో తెలుసుకొనుటకు ఉద్దేశించబడినది. సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం నిర్వహించే సమయాన్ని, తేదిని పిల్లలకు ముందే తెలియజేస్తారు. ఇందుకోసం సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం నాటికి అయిన అన్ని పాఠ్యాంశాలలో రాతపరీక్షను నిర్దేశించబడ్డ సమయంతో రెండున్నర గంటలపాటు నిర్వహిస్తారు. దీనిలో పిల్లలు తమ అభిప్రాయాలను, సమాధానాలను రాసిన దానిని బట్టి ఉపాధ్యాయులు వాటిని నిశితంగా పరిశీలించి పిల్లల ప్రగతిని (performance) అంచనావేయాలి. ఇందుకోసం కింది విధానాన్ని పాటించాలి.

- పరీక్ష నిర్వహణకోసం ఉపాధ్యాయులు సబ్జెక్టువారీగా నిర్ధారించిన విద్యా ప్రమాణాల ఆధారంగా ప్రశ్నాపత్రం రూపొందించుకోవాలి.
- మౌఖిక పరీక్షను ప్రత్యేకంగా నిర్వహించాల్సిన అవసరం లేదు. మౌఖిక పరీక్షకు సంబంధించిన విద్యా ప్రమాణాలకు కేటాయించిన మార్కులను ఉపాధ్యాయుడు తమ పరిశీలనల ఆధారంగా లేదా అంతకుముందు నమోదుచేసిన ఫార్మేటివ్ మూల్యాంకనం ఆధారంగా కేటాయించి పిల్లల ప్రగతిని నమోదుచేయాలి.
- రాత పరీక్షకోసం కేటాయించిన విద్యా ప్రమాణాలకోసం, ఆయా సబ్జక్టులవారీగా నిర్ధారించిన భారత్వాల ప్రకారం విద్యాప్రమాణాల ఆధారంగా ప్రశ్నాపత్రం రూపొందించుకోవాలి.
- సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం (Summative Evaluation) ఒక విద్యా సంవత్సర కాలంలో రెండుసార్లు నిర్వహించాలి. కావున మొదటి సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం. అక్టోబర్ మాసంలో, రెండవ సంగ్రహణాత్మక మూల్యాకనం మార్చి లేదా ఏప్రిల్ మాసంలో నిర్వహించాలి. మొదటి సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం కోసం ప్రశ్నాపత్రం రూపొందించుకొనేప్పుడు అక్టోబర్ నెలవరకు పూర్తయిన సిలబస్‌ను పరిగణలోకి తీసుకోవాలి. అలాగే రెండవ సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనంకోసం ప్రశ్నాపత్రం రూపొందించుకొనేప్పుడు పూర్తి పాఠ్యపుస్తకాన్ని అనగా అన్ని అధ్యాయాలను పరిగణలోకి తీసుకోవాలి. ఐతే రెండవ భాగం నుండి 60% నుండి 70% అంశాలకు ప్రాధాన్యత ఇస్తే మొదటి భాగంలో 30% నుండి 40% అంశాలకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి.
- సమ్మేటివ్ ప్రశ్నాపత్రాన్ని రూపొందించినపుడు అన్నిరకాల ప్రశ్నలకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి. అనగా పెద్ద ప్రశ్నలు, చిన్న ప్రశ్నలు, ఖాళీలు, బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు మొదలగునవి.

పై రెండు మూల్యాంకనాలలో నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనంలో పిల్లల ప్రగతిని పరిశీలన, మౌఖిక, రాతరూపాలలో అంచనావేస్తే, సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనంలో రాతరూపంలో మాత్రమే అంచనా వేయాల్సి ఉంటుంది. అయితే ప్రాథమిక తరగతులలో అనగా 1, 2 తరగతులకు కొంత వెయిటేజి మౌఖిక మూల్యాంకనం నిర్వహించడానికి ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి.

పై సందర్భాలలో భాగంగా బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలలో మూల్యాంకనం నిర్వహిస్తున్నప్పుడు నిర్దేశించిన విద్యాప్రమాణాల సాధన ముఖ్యమైనదిగా భావించాలి. వీటి సాధనే ప్రాధాన్యతగా కృత్యాల నిర్వహణ, చర్చ అభిప్రాయసేకరణ జరగాలి. తద్వారా పిల్లల ప్రగతి అంచనా వేయబడాలి. ఇందుకోసం జులై, సెప్టెంబర్, డిసెంబర్, ఫిబ్రవరి మాసాలలో నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనం (Formative Evaluation), అక్టోబరు, మార్చి లేదా ఏప్రిల్‌లో సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం నిర్వహించాలి.

**నిర్మాణాత్మక మరియు సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం నిర్వహణ సందర్భంగా దృష్టిలో ఉంచుకోవాల్సిన అంశాలు :**

- ఇప్పటి వరకు పిల్లల ప్రగతిని అంచనా వేయడానికి కేవలం రాత పరీక్షలకు మాత్రమే పరిమితమై ఉన్నాం. కావున పిల్లలు ప్రగతిని అంచనా వేయడంలో రాత పరీక్షతోపాటు కింది అంశాలను కూడా దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

  1) పిల్లల భాగస్వామ్యం – ప్రతిస్పందనలు (Participation - Reflection)), 2) పిల్లల రాత పనులు (నోటుబుక్‌లు, అసైన్‌మెంట్లు, పోర్టుఫోలియోలు (Written works), 3) స్లిప్ టెస్ట్ (slip test), 4) పిల్లల ప్రాజెక్టు పనులు (Children Project Works), 5) విద్యాప్రమాణాల ఆధారంగా రాతపరీక్ష (Written test based an Academic standards).

  పైన తెలిపిన సాధనాలలో పిల్లల ప్రాజెక్టు పనులు, భాగస్వామ్యం – ప్రతిస్పందనలు, స్లిప్‌టెస్టు, రాత పనులను నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనం (Formative Assessment), విద్యాప్రమాణాధారిత రాతపరీక్షను సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం (Summative Assessment) కోసం సాధనాలుగా వినియోగించాలి.

- CCE అనేది నిరంతరం జరిగేప్రక్రియ. ఉపాధ్యాయులే తమ పిల్లల ప్రగతిని అంచనావేయడం ద్వారా తగిన సహాయం అందించి వారి అభివృద్ధికి కృషిచేయాల్సి ఉంటుంది. ఇందుకోసం ఎవరో / ఏదో సంస్థ తయారుచేసిన ప్రశ్నాపత్రాలతో పరీక్షలు నిర్వహించడం సహేతుకంకాదు. కాబట్టి CCE లో అతి ప్రధానమైనది ఉపాధ్యాయులే. మరియు బోధించిన పాఠాల ఆధారంగా ప్రశ్నాపత్రాలు తయారుచేసుకోవాలి.

- సాధారణంగా ప్రశ్నలు పాఠ్యపుస్తకంలోని విషయ ప్రాధాన్యతగా ఉంటాయి. కాని ప్రస్తుతం ప్రతి తరగతికి విద్యా సంవత్సరంలో సాధించాల్సిన విద్యా ప్రమాణాలను నిర్ధారించడమైనది. బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు విద్యా ప్రమాణాల సాధనకే నిర్వహిస్తారు. కావున మూల్యాంకనంలో కూడా వీటి సాధనకే ప్రాధాన్యమివ్వాలి. ఇందుకోసం విద్యాప్రమాణాల ఆధారంగా ప్రశ్నాపత్రాలు తయారుచేయాల్సి ఉంటుంది.

- పిల్లలకు మూల్యాంకనంలో ఇచ్చే ప్రశ్నలు, కృత్యాలు; ప్రాజెక్టులు వారిని ఆలోచింపజేసేలా, బహుళ సమాధానాలు రాసేలా, అన్వయించుకొనేలా, దైనందిన జీవితంలో వినియోగించేలా తమ అనుభవాలు, అభిప్రాయాలు వ్యక్తపరిచేలా ఉండాలి.

- సమస్యా సాధన (Problem solving) విద్యాప్రమాణాల కోసం పిల్లలకిచ్చే సమస్యలు ప్రధానంగా పద సమస్యలు, పట సమస్యలు, దత్తాంశ అవగాహన – విశ్లేషణ, పట్టికలు – గ్రాఫ్, పద్ధతి ప్రకారం చేయు సమస్యలు, నిర్మాణాలు మొదలైన వివిధ రకాల సమస్యలతో, సంక్లిష్టతతోకూడి ఉంటాయి. ఈ సంక్లిష్టత అనేది వివిధ భావనలు, నిత్యజీవిత సందర్భాలలో అనుసంధానం చేయడం సమస్యలోని సోపానాల సంఖ్య, సమస్యలోని ప్రక్రియల సంఖ్య, సమస్యసాధనకు ఇవ్వబడిన 'సందర్భ సమాచారం, సమస్య సాధించే పద్ధతియొక్క సహజత్వంపై ఆధారపడి ఉంటాయి.

- కారణాలు చెప్పడం – నిరూపణలు చేయడం (Reasoning - proof) విద్యాప్రమాణానికి చెందిన సమస్యలు ఈ అంశాలతో కూడి ఉండేలా ఉండాలి. అవి దశలవారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించడం లాంటివి గణిత సాధారణీకరణాలు మరియు కల్పనలను అర్థం చేసుకొని చేయగలిగే సమస్యలు, పద్ధతిని అర్థం చేసుకొని సరిచూడడం లాంటి సమ్యలు, తార్కిక చర్యలను పరీక్షించడం లాంటి సమస్యలు, సమస్య నిరూపణలోని క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి చెందిన సమస్యలు, గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించడానికి చెందిన సమస్యలు, ఆగమన నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడానికి చెందిన సమస్యలతో కూడిన వాటిని దృష్టిలో ఉంచుకొని నిర్మాణాత్మక, సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనాలు నిర్వహించబడాలి.

- వ్యక్తపరచడం (Communication) అనే విద్యాప్రమాణాన్ని దృష్టిలో ఉంచుకొని నిర్మాణాత్మక, సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం నిర్వహించినపుడు గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవడం, రాయడానికి చెందిన సమస్యలు, గణిత వ్యక్తీకరణలతో కూడిన సమస్యలు, గణిత పరమైన ఆలోచనలను తన స్వంత మాటల్లో వివరించడానికి చెందిన సమస్యలు, గణిత సమస్యా పద్ధతిని, తార్కికతను వివరించడానికి ఉద్దేశించబడ్డ సమస్యలు ఇవ్వాలి. వీటిని పిల్లలందరూ ఎలా చేస్తున్నారో గమనించేలా పరిశీలించేలా మూల్యాంకనం బోధనాభ్యస ప్రక్రియలు ఉండాలి.

- సంబంధాలు (Connection) అనే విద్యా ప్రమాణం కోసం పిల్లలకు నిర్వహించే కృత్యాలు కాని, మూల్యాంకనం కాని కింది వాటిని సాధించబడేలా ఉండాలి. అనగా ఈ విద్యా ప్రమాణాలలో ఇచ్చే కృత్యాలు, సమస్యలు ప్రధానంగా అనుబంధ గణిత పాఠ్యభాగాలైన సంఖ్యలు, కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగహారం, నిష్పత్తి, అమరికలు, సౌష్ఠవం, కొలతలు మరియు తలం / అంతరం లకు చెందిన వివిధ భావనలను అనుసంధానం చేయగల్గడం, ఈ భావనలతో కూడిన గణాంకాన్ని దైనందిక జీవితాన్ని అనుసంధానం చేయగల్గడం, నేర్చుకున్న గణితాంశాలను వివిధ సబ్జెక్టులలోని అంశాలకు అనుసంధానం చేయడం, గణితంలోని వేర్వేరు భావనలతో కూడిన పాఠ్యాంశాలను అనుసంధానం చేయడం. భావనలను బహుళపద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం కూడ ఉండాలి. పై అంశాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని మూల్యాంకన కృత్యాలు నిర్వహించడం ద్వారా పిల్లలు ప్రగతిని సాధించేలా చూడాలి.

- ప్రాతినిధ్యపరచడం – దృశ్యీకరణ (Visulization and Representation) విద్యాప్రమాణాన్ని మూల్యాంకనం చేసేప్పుడు ఇచ్చే కృత్యాలు, సమస్యలు ప్రశ్నలు కింది అంశాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని రూపొందించాలి. అవి (1) పట్టికలోని సమాచారం చదవడానికి ఉద్దేశించిన సమస్యలు, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మచిత్రం, 2D పటాలు, 3D పటాలు చదవడానికి ఉద్దేశించిన సమస్యలు, (2) పట్టికలను రూపొందించడం, సంఖ్యారేఖపై చూడడం, పటచిత్రములు, దిమ్మచిత్రములు, పటాలను గీయడానికి ఉద్దేశించబడే సమస్యలు.

- నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనం, సంగ్రహణాత్మక మూల్యాకనం నిర్వహణ కోసం తరగతులవారీగా నిర్వహించాల్సిన సాధనాలు, పరిశీలించాల్సిన విద్యాప్రమాణాలు వాటి భారత్వం కింది పట్టికలో ఇవ్వడమైనది. నిర్ధారించిన లక్ష్యాల సాధనకు కింది పట్టికలోని అంశాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని పిల్లల ప్రగతిని అంచనావేయాలి.

**గణితం – భారత్వ పట్టిక**

| తరగతి | అంశం | ఫార్మేటివ్ | | | | | గ్రేడు | సమ్మేటివ్ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | భాగస్వామ్యం– ప్రతిస్పందనలు | నోటు పుస్తకాలు | ప్రాజెక్టు | స్లిప్ టెస్ట్ | మొత్తం | | సమస్యా సాధన | | కారణాలు నిరూపణలు | | వ్యక్తపరచడం | | సంబంధాలు | | ప్రాతినిధ్యపరచడం – దృశ్యీకరణ | | మొత్తం |
| | | | | | | | | మౌ | రా | మౌ | రా | మౌ | రా | మౌ | రా | మౌ | రా | |
| 1–2 | భారత్వం | 20% | 20% | 20% | 40% | 100% | | 10% | 40% | 10% | – | – | 10% | 10% | – | 10% | 10% | 100% |
| | మార్కులు | 10 | 10 | 10 | 20 | 50M | | 5 | 20 | 5 | – | – | 5 | 5 | – | 5 | 5 | 50M |
| 3–5 | భారత్వం | 20% | 20% | 20% | 40% | 100% | | 50% | | 20% | | 10% | | 10% | | 10% | | 100% |
| | మార్కులు | 10 | 10 | 10 | 20 | 50M | | 25 | | 10 | | 5 | | 5 | | 5 | | 50M |
| 6–9 | భారత్వం | 20% | 20% | 20% | 40% | 100% | | 40% | | 20% | | 10% | | 20% | | 10% | | 100% |
| | మార్కులు | 10 | 10 | 10 | 20 | 50M | | 40 | | 20 | | 10 | | 20 | | 10 | | 100M |

**మౌ = మౌఖిక (Oral)**

**రా = రాత (Written)**

**ప్రశ్నాపత్రం రూపొందించేప్పుడు దృష్టిలో ఉంచుకోవాల్సిన అంశాలు :**

- నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనంలో slip test కోసం, సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం కోసం ప్రశ్నపత్రం రూపొందించుకోవాలి.
- నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనంలో slip test కోసం I నుండి IX తరగతులకు 20 మార్కులకు, సమ్మేటివ్ మూల్యాంకనం కోసం I నుండి V తరగతులకు 50 మార్కులకు, VI నుండి IX తరగతులకు 100 మార్కులకు ప్రశ్నాపత్రం రూపొందించుకోవాలి.
- సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనంలో ప్రశ్నాపత్రం తయారుచేసేప్పుడు భారత్వపట్టికలో సూచించిన విధంగా ప్రశ్నల రకాలు, వాటి సంఖ్య ఆధారంగా మాత్రమే సమస్యలు ఇవ్వాలి.
- భారత్వపట్టిక :–

| క్ర.సం | ప్రశ్నల రకాలు | 1–5 తరగతులు | | | 6–9 తరగతులు | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ప్రశ్నలు | మార్కులు | మొత్తం | ప్రశ్నలు | మార్కులు | మొత్తం |
| 1 | పెద్ద ప్రశ్నలు (Essay) | 4 | 5 | 20 | 4 | 10 | 40 |
| 2 | చిన్న ప్రశ్నలు (Short type) | 8 | $2\frac{1}{2}$ | 20 | 8 | 5 | 40 |
| 3 | అతి చిన్న ప్రశ్నలు (Very Short type) | 5 | 1 | 5 | 10 | 1 | 10 |
| 4 | ఖాళీలు & బహుళ ఐచ్ఛిక ప్రశ్నలు (Fill in the blanks & multiple Choice Questions) | 5 | 1 | 5 | 20 | $\frac{1}{2}$ | 10 |

- సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనంలో ప్రశ్నాపత్రం రూపొందించుకొనేప్పుడు ప్రాథమిక తరగతులకు సమస్యాసాధన విద్యాప్రమాణానికి చెందిన ప్రశ్నలకు 50% భారత్వం, మిగతా విద్యా ప్రమాణాల ప్రశ్నలన్నింటికి కలిపి 50% భారత్వం ఉండేలా చూడాలి. అలాగే ఎలిమెంటరీ స్థాయిలో 40% భారత్వం సమస్యా సాధనకు మిగతా 60% భారత్వం ప్రశ్నలు మిగతా విద్యాప్రమాణాలకు కేటాయించుకోవాలి. సమస్యాసాధనపోను మిగతా విద్యాప్రమాణాలకు కేటాయించే భారత్వం ఆయా అధ్యాయాలలోని అంశాలను బట్టి విద్యాప్రమాణాల వారీగా ఒక్కో విద్యాప్రమాణానికి కనీసం 10% నుండి అత్యధికంగా 20% వరకు ఇవ్వవచ్చు. ఇందుకోసం భారత్వపట్టికను పరిశీలించండి. అయితే ఎట్టిపరిస్థితుల్లో వేటి మొత్తం శాతం 60కి మించరాదు. (అనగా కింది భారత్వపట్టికలో సూచించిన విధంగా లేదా మరొకవిధంగా 20%, 15%, 15%, 10% ఉండేలా లేదా 20%, 15%, 10%, 15% లేదా 20%, 10%, 15%, 15% ఉండేలా కూడా ఇవ్వవచ్చు).

**తరగతి, విద్యాప్రమాణాల వారీగా భారత్వం – సమ్మేటివ్**

| తరగతి | అంశం | సమస్యా సాధన | కారణాలు నిరూపణలు | వ్యక్తపరచడం | సంబంధాలు | ప్రాతినిధ్యపరచడం – దృశ్యీకరణ | మొత్తం |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 నుండి 2 తరగతులు | భారత్వం | 50% | 10% | 10% | 10% | 20% | 100% |
| | మార్కులు | 25 | 5 | 5 | 5 | 10 | 50 |
| 3 నుండి 5 తరగతులు | భారత్వం | 50% | 20% | 10% | 10% | 10% | 100% |
| | మార్కులు | 25 | 10 | 5 | 5 | 5 | 50 |
| 6 నుండి 9 తరగతులు | భారత్వం | 40% | 20% | 10% | 20% | 10% | 100% |
| | మార్కులు | 40 | 20 | 10 | 20 | 10 | 100 |

- I, II తరతులకు 40% భారత్వం మౌఖిక పరీక్షకు, 60% భారత్వం రాత పరీక్షకు ఇవ్వబడినందున ఈ తరగతుల ప్రశ్నాపత్రం రూపొందించుకొనేప్పుడు మౌఖిక పరీక్షకు చిన్న చిన్న సంఖ్యలతో కూడి, చిన్న వాక్యాలతో ఉన్న ప్రశ్నలు మాత్రమే అడగాలి. 3 నుండి 5 మరియు ఎలిమెంటరీ తరగతులకు ఒక రాతపరీక్ష మాత్రమే నిర్వహించాలి. కావున భారత్వ పట్టికను దృష్టిలో పెట్టుకొని ప్రశ్నాపత్రం తయారుచేసుకోవాలి.

### 1, 2 తరగతులు, సమ్మేటివ్ - రాత - మౌఖిక పరీక్షల భారత్వ పట్టిక

| అంశం | సమస్యా సాధన | | కారణాలు నిరూపణలు | | వ్యక్తపరచడం | | సంబంధాలు | | ప్రతిపాదించడం | | మొత్తం |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | మౌఖిక | రాత | మౌఖిక | రాత | మౌఖిక | రాత | మౌఖిక | రాత | మౌఖిక | రాత | |
| భారత్వం | 10% | 40% | 10% | - | - | 10% | 10% | - | 10% | 10% | 100% |
| మార్కులు | 5 | 20 | 5 | - | - | 5 | 5 | - | 5 | 5 | 50 |

- వ్యాసరూప ప్రశ్నలు ఇచ్చినప్పుడు ప్రధానంగా రాత సమస్యలు లేదా ఎక్కువ తార్కికతతో కూడినవి లేదా రెండు, మూడు ప్రక్రియలతో కూడినవి లేదా ఎక్కువ ఆలోచన రేకెత్తించేవి ఇవ్వవచ్చు. ఎట్టి పరిస్థితుల్లోను short type రకాల ప్రశ్నలు, వాటికన్నా తక్కువ స్థాయిలో ఉన్న ప్రశ్నలు ఉండరాదు. ఎలిమెంటరీ స్థాయిలో సిద్ధాంతాలు, నిర్మాణాలు, సమీకరణ సాధనలు, గ్రాఫ్‌లు మెదలైనవి కూడా వ్యాసరూప ప్రశ్నలుగా ఇవ్వవచ్చు.
- Short type ప్రశ్నలలో ఒక ప్రక్రియతో కూడినవి, నేరుగా జవాబు వచ్చేవి. Figur Problems 4, 5 steps లో వచ్చేవి, చిన్న చిన్న వివరణలతో అంశాలతో కూడినవి ఇవ్వవచ్చు.
- Very short ప్రశ్నలలో చిన్న చిన్న లెక్కలు, మౌఖికంగా గణించగలిగే లెక్కలు, నిర్వచనాలు, సూత్రాలతో, సింబల్స్‌తో కూడినవి, twist తోకూడినవి మొదలైనవి అడుగవచ్చు.
- Objective type ప్రశ్నలు చాలా తక్కువ సమయం తీసుకొని మౌఖికంగా గణనచేసేవి, ఆలోచనతో కూడినవి ఇవ్వాలి. ఎక్కువ గణనలు, ఎక్కువ ప్రక్రియలో ఉన్నవి ఇవ్వకూడదు.
- ఎట్టిపరిస్థితులలో Short types, Very short type లలో ఇచ్చే ప్రశ్నలు eassy type లో ఉండే ప్రశ్నల స్థాయితో కూడి ఉండరాదు. ఇలాగే మిగతా రకాల ప్రశ్నలలో కూడా ఉండేలా చూడాలి.
- Essay type, Short type, Very short type, Objective type ప్రశ్నలలో ఏ రకం ప్రశ్నలు ఇచ్చినప్పటికి పిల్లల్ని ఆలోచింపజేసేలా, విద్యా ప్రమాణాల్ని సాధింపజేసేలా ఉండాలి. కాని బట్టీ పట్టి జవాబులు రాసేలా ఉండకూడదు.
- ప్రతి విద్యాప్రమాణానికి ఇచ్చే Essay type ప్రశ్నలలో వీలయితే Choice గా అదనపు ప్రశ్నలు ఇవ్వవచ్చు లేదా రెండు ప్రశ్నలలో ఏదైన ఒక దానిని ఎన్నుకొనేలా Choice కూడా ఇవ్వవచ్చు. కాని మిగతా type ప్రశ్నలలో ఎలాంటి అదనపు ప్రశ్నలు ఇవ్వకూడదు. ఒక type ప్రశ్నలలో ఇచ్చిన ప్రశ్నలన్నియు ఒకే స్థాయితో కూడినవిగా ఉండాలి. ఒకవేళ ఒక అధ్యాయంలో Essay type కు సమాన స్థాయి ప్రశ్న దొరకనప్పుడు short type స్థాయి ప్రశ్నలు రెండు కలిపి ఒక Essay type ప్రశ్నగా ఇవ్వవచ్చు.
- Essay ప్రశ్నలలో భాగంగా గ్రాఫుకాని, యాక్టివిటీగాని, situation గాని, సమాచార పట్టికలుగాని ఇచ్చి వీటిపై చిన్న చిన్న ప్రశ్నల ద్వారా (small questions) 10 మార్కులకు గాని లేదా 5 మార్కులకు గాని ప్రశ్నలు ఇవ్వవచ్చు.

## పిల్లలు రాసిన తప్పులను మనం ఎలా అర్థం చేసుకోవాలి?

నిరంతరం సమగ్ర మూల్యాంకనం ఒక సంప్రదాయ సాధారణ పరీక్షకాదు. పిల్లలు నేర్చుకోవడానికి దోహదపడే ఒక బోధనాభ్యస ప్రక్రియ (Assessment for learning). పాఠ్యబోధనకు ముందు, బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు జరుగుతున్నప్పుడు, తర్వాత తరగతి గదిలో, ప్రయోగశాలలో, గ్రంథాలయాలలో, ఆటస్థలంలో, నిత్యజీవిత వినియోగం మొదలగు సందర్భాలలో, పిల్లల శారీరక, మానసిక, సాంఘిక, ఉద్వేగ వికాసాలను పరిశీలించి నమోదుచేసే ప్రక్రియ. కావున బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు, కృత్యాల నిర్వహణ, ప్రాజెక్టుల నిర్వహణ, ఆటలు మొదలగు సందర్భాలలో పిల్లలు జట్లలో పనిచేయం, ఉపాధ్యాయులతో చర్చించడం, ప్రశ్నించడం, ప్రదర్శించడం, అభిప్రాయాలను మౌఖిక, రాత రూపాలలో వ్యక్తపరచడం చేస్తుంటారు. వీటి ఆధారంగా మనం వారిని, వారి ప్రగతిని అంచనావేస్తుంటాం.

పిల్లలు మౌఖికంగా అభిప్రాయాలు వ్యక్తపరిచినప్పుడు, ప్రదర్శించినప్పుడు, మనం బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో వారితో చర్చిస్తున్నప్పుడు వారి అభ్యసనలోని తప్పులను పెద్దగా పట్టించుకోము, ఒకటికి రెండుసార్లు వివరిస్తుంటాము. అవసరమైతే ఒకటి రెండు సార్లు చేసిచూడమని కోరుతుంటాము. కాని ఆశ్చర్యకరమైన విషయం ఏమిటంటే ఒకవేళ పిల్లవాడు రాత రూపంలో నోటుబుక్‌లో సమస్యను తప్పుగా రాసినప్పుడు జవాబును పరిశీలించి తప్పుగా రాసారని చెబుతుంటాం. తప్పు సమాధానం ఇచ్చిన విద్యార్థిని తప్పుగా అర్థం చేసుకోకూడదు. విద్యార్థికి కూడ వివేచన ఉంటుందని గ్రహించి అతడు ఆ సమాధానమేఎందుకు చెప్పాడో కనుక్కోవాలి. దీనికి కారణం భాషను అర్థం చేసుకోవడంలో పిల్లవాడు ఇబ్బందిపడడమా? లేక భావనను తప్పుగా అర్థం చేసుకోవడమా? ఇచ్చిన సూచనలను అర్థం చేసుకోలేకపోవడమా? సమస్యను చదివి అర్థ:చేసుకోలేకపోవడమా? విశ్లేషణ చేయలేకపోవడమా? అనే అంశాలను విశ్లేషించుకోవాలి. అతడు చెప్పిన సమాధానంలో తానే తప్పును గుర్తించి తప్పును సరిదిద్దుకునేలా అవగాహన కల్పించాలి. ఎందుకు సరైనదో కాదో విస్తృత స్థాయిలో వివరించారు.

ఇందుకోసం మనం బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల సందర్భంగా ఉపయోగించే భాష, పదాలు, సాంకేతిక పదాలు మొదలగు వాటిపై దృష్టి ఉంచాలి. సూచనలు, పెద్దపెద్ద వాక్యాలుగా ఉండరాదు. పిల్లలు చదివి అర్థం చేసుకొనే సరళమైన భాషకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాల్సి ఉంది.

పిల్లలు మౌఖికంగా ఏర్పరుచుకున్న భావనలు, రాత పూర్వక పరీక్షలో ఉపయోగించుకోలేరు. ఎందుకు?

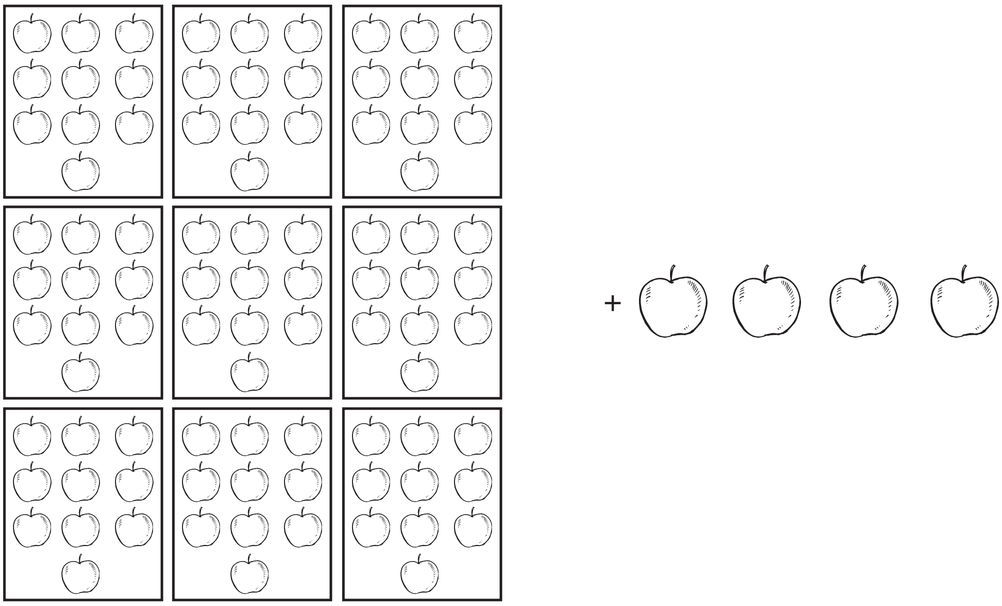
విద్యార్థులు నిజజీవిత సమస్యల సాధనలో తరగతి గదిలో నేర్చుకున్నటువంటి గణిత భావనలను ఉపయోగించుకుంటున్నారు. రాత పూర్వక పరీక్షల్లో పిల్లలు సమస్యలను అర్థం చేసుకోవడంలో తప్పిదాలు చేయడంవల్ల వారు నేర్చుకున్న భావనలను సరిగా వినియోగించుకోలేకపోతున్నారు. ఈ విధంగా తరగతి గదిలో గణిత పరమైన పదజాలం అనేది చాలా ప్రాధాన్యత కల్గి ఉంటుంది. వాటిని పిల్లలు అవగాహన చేసుకునే తరగతి గదిలో విస్తృత అభ్యాసాలు కల్పించాలి. పదాజాలంను పరిచయం చేస్తూ నిజజీవిత అంశాలతో సమన్వయం చేయాలి.

ఉదాహరణకు ఒక విద్యార్థి కింది సమస్యను ఈ విధంగా చేశాడు అనుకుందాము.

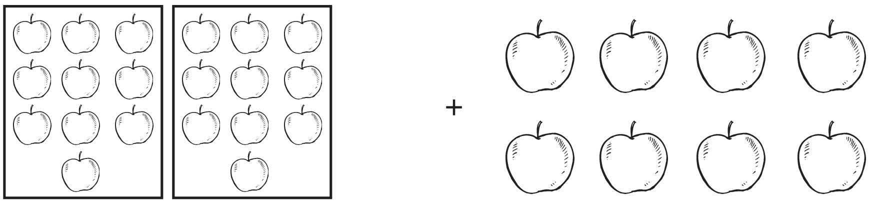
$$\begin{array}{c} 94 \\ 28 \\ \hline 1112 \\ \hline \end{array}$$

ఒక ఉపాధ్యాయుడిగా ఈ తప్పును పిల్లవాడు ఎందుకు తప్పుగా చేసాడు అనే విషయాన్ని తెలుసుకోవాల్సిన అవసరం ఉంది. ముఖ్యంగా పిల్లలు స్థాన విలువల గురించి అవగాహన లేకపోవడం వల్లనే ఈ విధమైన పొరపాట్లు చేసే అవకాశం ఉంటుంది. ఇలాంటి పొరపాట్లు పునరావృతం కావద్దంటే వస్తువుల సహాయంతో కృత్యాన్ని చేయిస్తే పొరపాట్లను దూరం చేయగల్గుతాం.

94 =



28 =



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 94 ఆపిళ్ళు | = | 90 ఆపిళ్ళు | + | 4 ఆపిళ్ళు | | |
| 28 ఆపిళ్ళు | = | 20 ఆపిళ్ళు | + | 8 ఆపిళ్ళు | | |
| | = | 110 ఆపిళ్ళు | + | 12 ఆపిళ్ళు | | |
| | = | 110 ఆపిళ్ళు | + | 10 ఆపిళ్ళు | + | 2 ఆపిళ్ళు |
| | = | 120 ఆపిళ్ళు | + | 2 ఆపిళ్ళు | | |
| మొత్తం ఆపిళ్ళు | = | 122 ఆపిళ్ళు | | | | |

అంటే ఒకట్ల స్థానంలోని 4ను 8ను కలిపితే 12 వస్తుంది. దీనిలో 1 పది; 2 ఒకట్లు ఉన్నాయి. కాబట్టి ఈ ఒక పదిని పదుల స్థానంలోకి అంకెలతో కల్పి కూడవలెను అనే అంశాన్ని పిల్లలకు విస్తృతంగా అవగాహన పరచాలి.

# సంగ్రహణాత్మక (సమ్మేటివ్) ప్రశ్న పత్రం - గణితం

**విద్యార్థి పేరు :** ______________________ **తరగతి : 8వ తరగతి**

## I. సమస్యా సాధన : (40 మార్కులు)

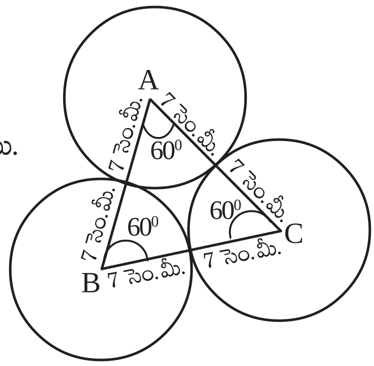
1. కింది వాటిలో ఏదేని ఒక సమస్యను సాధించండి. (1 × 10 = 10 మా.)

   (a) BE = 2.9 సెం.మీ, ES = 3.2 సెం.మీ., ST = 2.7 సెం.మీ., BT = 3.4 సెం.మీ. మరియు $\angle B = 75^0$ BEST గల చతుర్భుజాన్ని నిర్మించండి.

   (b) BE = 4.2 సెం.మీ, ES = 5 సెం.మీ., LT = $45^0$ కొలతలతో BELT సమాంతర చతుర్భుజాన్ని నిర్మించండి.

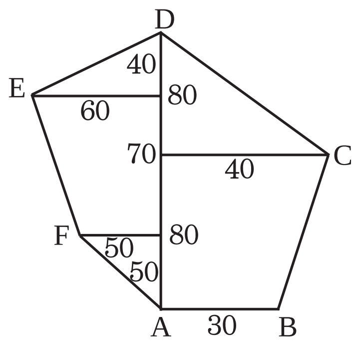
2. కింది వానిలో ఏదేని ఒక సమస్యను సాధించండి. (1 × 10 = 10 మా.)

   (a) ఒక సమబాహు త్రిభుజవైశాల్యము $49\sqrt{3}$ చ.సెం.మీ. వృత్తకేంద్రమును శీర్షములుగా మూడు వృత్తములు బాహ్యముగా పటములో చూపిన విధంగా స్పృశించుకొంటున్నాయి. అయినచో వృత్తమును కల్గియుండని త్రిభుజ ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.




(లేదా)

   (b) కింద ఇవ్వబడిన పొలము యొక్క వైశాల్యం కనుగొనుము. కొలతలన్నియు మీటర్లలో ఉన్నవి.




3. కింది సమస్యలను సాధించండి. (4 × 5 = 20 మా.)

   (a) మిశ్రమావర్తిత దత్తాంశం $15.73\overline{2}$ ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.

   (b) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right] \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ సూక్ష్మీకరించుము.

   (c) $26z^3 (32z^2 - 18) \div 13z^2 (4z - 3)$ భాగహారం చేయండి.

   (d) z అపూరాశి $x$ అనేరాశితో అనులోమానుపాతంలోను, $y$ అనేరాశితో 20% తరుగుదల ఉన్న z రాశిలో వచ్చు పెరుగుదల శాతమును కనుగొనుము.

## II. కారణాలు చెప్పడం - నిరూపణలు చేయడం (20 మార్కులు)

4. కింది సమస్యలను సాధించండి. (2 × 5 = 10 మా.)

   (a) వేర్వేరు కొలతలతో రెండు చతురస్రాలను గీయండి. అవి సరూపాలని మీరు చెప్పగలరా? వివరించండి. వాటి చుట్టుకొలతలు, వైశాల్యాలు కనుగొని వాటి నిష్పత్తులను కూడా కనుగొనండి. మరేమి గమనించారు.

   (b) $(n^3 - n)$, 3 చే భాగింపబడును. వివరించండి.

5. కింది వాటిని వివరించండి. (5 × 1 = 5 మా.)

   (a) 24, 6 యొక్క కారణాంకములైన 2, 3 లచే భాగింపబడునా?

   (b) సమఘనంనకు ఉండే ముఖాలన్నీ సమానమేనా?

   (c) $a(a - 2) = a^2 - 2a$ సర్వసమీకరణమేనా? ఎందుకు?

   (d) 8తో అంతమగు సంపూర్ణఘన సంఖ్యలేదు.

   (e) రెహమాన్ $4x$ను $7y$ కి కలిపితే $11xy$ వస్తుందన్నాడు. మీరు దీనితో ఏకీభవిస్తరా?

6. కింది సమస్యలకు జవాబులు తెలుపండి. ($10 \times \frac{1}{2} = 5$ మా)

   (a) ప్రతి సహజ సంఖ్య, ప్రతి పూర్ణాంకం, ప్రతి పూర్ణసంఖ్య అకరణీయ సంఖ్యయేనా?

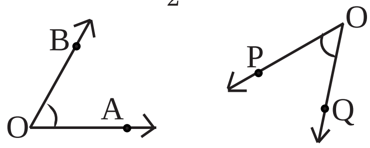
   (b) $2x : 3x : 5x$ అనునది 2 : 3 : 5 సమానం. ఎందుకు?

   (a) ఒక చతుర్భుజం నిర్మాణానికి 5 స్వతంత్రకొలతలు అవసరం. ఇందులో 4 భుజాల కొలతలు ఇచ్చినప్పుడు 5వ స్వతంత్రకొలత ఏది అవసరం అవుతుంది? ఎందుకు?

   (d) $a^{m-n} = 1$ ఎప్పుడవుతుంది? ఎలా?

   (e) 2, 3, 4లు పైథాగరియన్ త్రికాలు అవుతాయా? ఎందుకు?

   (f) n రాశులు గల దత్తాంశంలో, విలువలను ఆరోహణక్రమంలో రాసినప్పుడు దాని మధ్యగతము n బేసి సంఖ్య అయినప్పుడు $\frac{n+1}{2}$ రాశి అవుతుంది. ఎందుకు?

   (g) 

   ఈ రెండు పటాలు ఎప్పుడు సర్వసమానమవుతాయి?

   (h) వృత్తం కోణం $180^0$, చాపం పొడవు $\pi r$ అయినప్పుడు చాపం పొడవు మరియు సెక్టరు కోణముల మధ్యగల సంబంధం వివరించండి.

   (i) $7xy$ కి 1 కారణాంకమేనా? వివరించండి.

   (j) అయిలర్ సంబంధం "సమఘనం" ఆధారంగా వివరించండి.

## III. వ్యక్తపర్చుట (10 మార్కులు)

7. కింది సమస్య సాధించండి. (1 × 5 = 5 మా.)

   (a) మీరు గమనించిన అనులోమాను, విలోమానుపాత సందర్భాలను రెండింటిని రాయండి.

8. కింది వాటికి జవాబులు తెలుపండి. $(10 \times \frac{1}{2} = 5$ మా.)

(a) $l, b, h$ యూనిట్లుగాగల దీర్ఘ ఘనం యొక్క సంపూర్ణతలవైశాల్యంను తెలుపండి.

(b) $24x^3 \div 3x$ ను లబ్ధరూపంలో తెలుపండి.

(c) $A = \frac{1}{2} \times h\,(a + b)$ ను వాక్యరూపంలో తెలుపండి.

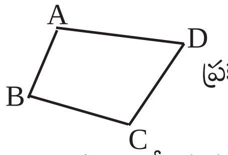
(d) $\overline{x} = \dfrac{\Sigma\, x_i}{n}$ లో $\Sigma\, x_i$ దేనిని సూచిస్తుంది?

(e) ఒక భిన్నంలో లవం, హారం కంటే 6 తక్కువ. భిన్నాన్ని సూచించండి.

(f) a, b, c లు ఏవేని మూడు అకరణీయ సంఖ్యలకు సహచర ధర్మాన్ని తెలుపండి.

(g) $5pq^2$ కు సరిపడ ఒక సజాతి పదాన్ని రాయండి.

(h) ఒక ఏకపది మరియు ఒక ద్విపది యొక్క లబ్దాన్ని తెలుపండి.

(i) 

ప్రక్కపటం వైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రాన్ని తెలుపండి.

(j) 9 యొక్క భాజనీయత నియమాన్ని తెలుపండి.

## IV. అనుసంధానం (20 మార్కులు)

9. కింది సమస్యలు సాధించండి. $(2 \times 10 = 20$ మా.)

(a) ఒక దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత 24 మీ. దాని చుట్టుకొలతను మార్పుచేయకుండా పొడవును 1మీ. పెంచినప్పుడు, దాని వెడల్పు మరియు వైశాల్యములలో మార్పువచ్చును. కింది పట్టికను నింపి ఆ విలువల ఆధారంగా వెడల్పు, వైశాల్యములలో విలువలు పొడవు విలువ మార్పుమీద ఏ విధంగా ఆధారపడుతాయో గమనించుము. మీరు ఏమి గమనించారు? మీ పరిశీలనలను తెలుపండి.

| పొడవు (సెం.మీ.) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| వెడల్పు (సెం.మీ.) | 11 | 10 | | | | | | | |
| వైశాల్యం (చ.సెం.మీ.) | 11 | 20 | | | | | | | |

(b) ఒక గ్రాఫు కాగితంపై లేదా చతురస్ర బిందుమాపనిపై ఒక దీర్ఘ చతురస్రాన్ని గీయండి. దానికి సరూప పటాన్ని నిర్మించండి. ఈ రెండు పటాల వైశాల్యాలు మరియు చుట్టుకొలతలు కనుగొని వాటి వాటి నిష్పత్తులను దీర్ఘచతురస్రాల భుజాల నిష్పత్తులతో పోల్చండి.

## V. ప్రాతినిధ్యపర్చడం (10 మార్కులు)

10. కింది సమస్యను సాధించండి. $(1 \times 5 = 5$ మా.)

(a) కింది దత్తాంశమునకు తరగతులు, పౌనఃపున్యములు రాయండి. ఆ దత్తాంశమునకు ఓజిల్ వక్రములను రెండింటిని గీయండి.

| మార్కులు | 5కన్న తక్కువ | 10 కన్న తక్కువ | 15 కన్న తక్కువ | 20 కన్న తక్కువ | 25 కన్న తక్కువ |
|---|---|---|---|---|---|
| విద్యార్థుల సంఖ్య | 2 | 8 | 18 | 27 | 35 |

(లేదా)

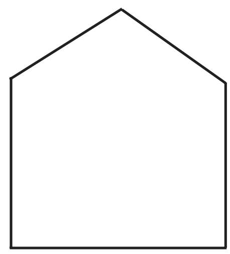
(b) కింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనం నందు 250 మంది శ్రామికుల ఒక వారపు వేతనాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు సోపానరేఖాచిత్రం, పౌనఃపున్య బహుభుజులను ఒకే గ్రాఫునందు నిర్మించండి.

| వారపు వేతనం | 500–550 | 550–600 | 600–650 | 650–700 | 700–750 | 750–800 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| శ్రామికుల సంఖ్య | 30 | 42 | 50 | 55 | 45 | 28 |

11. కింది సమస్యలు సాధించండి. (5 × 1 = 5 మా.)

(a) 5 యూనిట్లు × 3 యూనిట్లు × 2 యూనిట్లు కొలతలు కల దీర్ఘఘనమును సమాన మాపనంగల చుక్కల పటంపై చూపండి.

(b) ఈ పటాన్ని సూచంచిన విధంగా ఆకృతులుగా విభజించండి.



3 త్రిభుజాలు

(c) $3^4 \times 3^{-5}$ ను ఒకే ఘాతంగా వ్యక్తపరుచుము.

(d) ఒక శీర్షము కూడా లేని ఘనాకారపు వస్తువును గీయండి.

(e) ఏదేని ఒక ప్రాథమకి పటాన్ని ఉపయోగించి టెస్సలేషన్‌ను ఏర్పరచండి.

# సంగ్రహణాత్మక (సమ్మేటివ్) ప్రశ్న పత్రం – గణితం

**విద్యార్థి పేరు :** ________________________ **తరగతి : 9వ తరగతి**

## I. సమస్యా సాధన :

1. కింది వానిలో ఏదేని ఒక సమస్యను సాధించండి. ($1 \times 10 = 10$ మా.)

(a) ప్రపంచ క్రికెట్ ఆటగాళ్లలో శతకాలు (100 పరుగులు) చేసిన వారి సంఖ్యలు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

| శితాకాల సంఖ్య | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| ఆటగాళ్ళ సంఖ్య | 56 | 23 | 39 | 13 | 8 |

ఈ దత్తాంశమునకు సరాసరి, మధ్యగతములను కనుగొనండి.

(లేదా)

(b) ఒక ఉన్నత పాఠశాలలోని వివిధ తరగతుల విద్యార్థులు ఒక అనాథ శరణాలయంనకు ఇచ్చిన విరాళములు (రూపాయిలలో) కింది విధంగా ఉన్నవి.

| తరగతి | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| ఒక్కొక్క విద్యార్థి విరాళం (₹లలో) | 5 | 7 | 10 | 15 | 2 |
| విద్యార్థుల సంఖ్య | 15 | 15 | 20 | 16 | 14 |

0

ఈ వివరాలకు మధ్యగతము, బాహుళకములను కనుగొనండి.

2. కింది వానిలో ఏదేని ఒక సమస్యను సాధించండి. ($1 \times 10 = 10$ మా.)

(a) $\angle Y = 30^0, \angle Z = 60^0$ మరియు $XY + YX + ZX = 10$ సెం.మీ. $\Delta XYZ$ ను నిర్మించండి.

(లేదా)

(b) 7 సెం.మీ. పొడవుగల వృత్తజ్యాపై $60^0$ కోణములను కలిగి ఉండే వృత్త ఖండాన్ని నిర్మించండి.

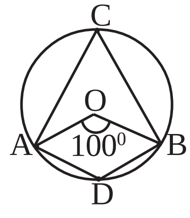
3. కింది సమస్యలను సాధించండి. ($4 \times 5 = 20$ మా.)

(a) $3.12\overline{7}$ ను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.

(b) $2x^3-3x^2+ax+b$ అనే బహుపదిని $(x-2)$చే భాగిస్తే శేషం 2 $(x+2)$ చే భాగిస్తే శేషం 2 వస్తే a, b ల విలువలు కనుగొనండి.

(c) 5.6 సెం.మీ. భూవ్యాసార్థము మరియు 158.4 చ.సెం.మీ. పక్కతల వైశాల్యం గల శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు మరియు శంఖువు ఎత్తులను కనుగొనుము.

(d) పటంలో 'O' వృత్తకేంద్రం మరియు $\angle AOB = 100^0$ అయిన $\angle ADB$ ని కనుక్కోండి.



## II. కారణాలు చెప్పడం - నిరూపణలు చేయడం

4. కింది సమస్యలు సాధించండి. (2 × 5 = 10 మా.)

(a) ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం మూడవ భుజం పొడవు కన్నా ఎక్కువ అని చూపండి.

(b) రాంబస్‌లో కర్ణములు పరస్పరం లంబాలుగా ఉంటాయని చూపండి.

5. కింది సమస్యలకు జవాబులు తెలుండి. (5 × 1 = 5 మా)

(a) $x^3 + 2x^2 + 3x + 7$ అనే బహుపదికి $(x+2)$ కారణాంకం అవుతుందా? ఎలా చెప్పగలవు?

(b) రెండు వేర్వేరు రేఖలు ఒకటికన్నా ఎక్కువ సంఖ్యలో ఉమ్మడి బిందువులను కలిగి ఉండవని నిరూపించండి.

(a) అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము యొక్క మధ్యగతము కనుగొనునపుడు ఏ వరుసలోని విలువలు క్రమముగా ఉండునట్లు రాయవలెను? ఎందుకు?

(d) ABCD చతుర్భుజంలో $AB = CD$, $BC = AD$ మరియు AC కర్ణం అయిన $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అని నిరూపిచండి.

(e) మూడు నాణేలు (ఒకే విధమైనవి) ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు ఏర్పడే బొమ్మ, బొరుసులేని పర్యవసానాల సంభావ్యత ఎంత? కారణం ఏమి?

5. కింది సమస్యలకు జవాబులు తెలుపండి. ($10 \times \frac{1}{2} = 5$ మా)

(a) $\sqrt{2}$ ను $\frac{\sqrt{2}}{1}$ గా రాయగలం. కావున అది అకరణీయ సంఖ్య అవుతుందా? కాదా? ఎందుకు?

(b) $(Q^p)^q = (Q^q)^p$ సత్యమా? కాదా? ఎందుకు?

(a) n ఒక సంపూర్ణ వర్గం కాని సహజసంఖ్య అయితే $\sqrt{n}$ ఏమవుతుందో తెలుపండి. ఎలా చెప్పగలవు?

(d) రెండు ఖండన రేఖలు, ఒక రేఖకు సమాంతర రేఖలు కాలేవు. ఎందుకు?

(e) ఒక సమబాహు త్రిభుజములో ఒక్కొక్క కోణం $60^0$ లు ఉంటుంది. ఎందుకు?

(f) దీర్ఘచతురస్రంలో రెండు కర్ణాలు సమానం. కాని సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు కర్ణాలు సమానంకావు. ఎందుకు?

(g) (5, −3) అనే బిందువు నిరూపకతలంలో ఏపాదంలో ఉంటుంది? ఎలా చెప్పగలవు?

(h) స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$. ఎందుకు అవుతుంది?

(i) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ లలో ఏది అకరణీయసంఖ్య? ఎందుకు?

(j) 1 చ.మీ. = $100^2$ చ.సెం.మీ. అవుతుందా? ఎందుకు?

## III. వ్యక్తపర్చుట

7. కింది సమస్యలను సాధించండి. (1 × 5 = 5 మా)

(a) $v = \pi r^2 h$ను వివరింపుము.

(b) నిరూపకతలంలో x–అక్షం నుండి 3 యూనిట్ల దూరంలో, y–అక్షం నుండి 5 యూనిట్ల దూరంలో 3వ పాదంలో నున్న బిందువు నిరూపకాలు రాయండి.

(c) $a^{1/n}$ యొక్క రాడికల్ రూపాన్ని రాయండి.

(d) ఒక గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం దాని వ్యాసార్థానికి సమానమైన వ్యాసార్థంగల వృత్త వైశాల్యానికి 4 రెట్లు ఉండును. దీనిని సూత్రరూపంలో రాయండి.

(e) $P(x)$ ను $(x\text{-a})$ చే భాగించినప్పుడు $Q(x)$ భాగఫలం, శేషం $P$(a) వస్తుంది. దీనిని భాగహార నియమం ప్రకారం రాయండి.

8. కింది వాటికి జవాబులు రాయండి. ($10 \times \frac{1}{2} = 5$ మా.)

(a) $P = 2\,(l + b)$ లో $l$ దేనిని సూచించును? ______________

(b) సరళరేఖ ABని గుర్తులనుపయోగించి రాయండి. ______________

(c) రేఖీయ సమీకరణ సాధారణ స్వరూపం రాయండి. ______________

(d) $x$ యొక్క గుణకం 7 అయిన ఆ పదం ఏది? ______________

(e) పౌనఃపున్యాల మొత్తంను ఎలా సూచిస్తాం? ______________

(f) వర్గ సమీకరణ సాధారణ స్వరూపం రాయుము. ______________

(g) 3.0157157157157.....ను సంక్షిప్తరూపంలో రాయండి.

(h) సరళరేఖలు AB , CD లు సమాంతర రేఖలు. దీనిని గుర్తునుపయోగించి రాయండి.

(i) ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0, 1ల మధ్య ఉంటుంది. దీనిని సంజ్ఞలనుపయోగించి రాయండి.

(j) $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$ లో $\dfrac{\Sigma x_i}{n}$ దేనిని సూచిస్తుంది?

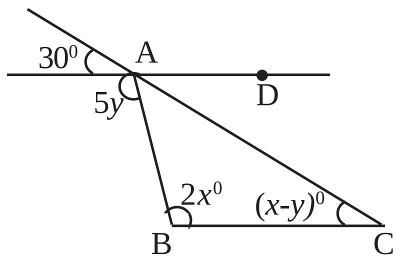
## IV. అనుసంధానం

9. కింది సమస్యలు సాధించండి. ($2 \times 10 = 20$ మా.)

(a) 28 లీటర్ల పాలు, నీళ్ల మిశ్రమంలో వాని నిష్పత్తి 5 : 2 అయిన మిశ్రమమునకు, పాలకు మధ్యగల సంబంధమును తెలియజేయు సమీకరణమును రూపొందించి దానికి రేఖాచిత్రమును గీయుము. దాని నుండి పై మిశ్రమంలో పాలపరిమాణంను కనుగొనుము.

(లేదా)

(b)




పక్క పటం నుండి $x, y$ ల ఏ విలువలకు AD, BC రేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయి.

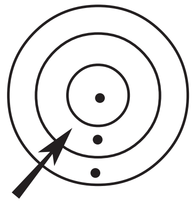
10. కింది సమస్యలు సాధించండి.

(a) అర్థగోళాకారపు పై కప్పు కల్గిన 7 మీ. ఎత్తుగల స్థూపాకారపు భవనంనకు రంగు వేయాలి. పై కప్పు యొక్క భూపరిధి 17.6 మీ. అయిన 10 చ.సెం.మీ.లకు రంగువేయుటకు ₹5ల చొప్పున భవనంనకు రంగువేయడానికి ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?

(లేదా)

(b) మూడు ఏకకేంద్ర వృత్తాకారాలలో తయారుచేయబడిన ఒక డార్ట్‌బోర్డులోని వృత్తాల వ్యాసార్థాలు 20 సెం.మీ., 10 సెం.మీ, 5 సెం.మీ.లుగా ఉన్నాయి. ఆ డార్ట్‌బోర్డు పటంలో చూపిన విధంగా A, B, C ప్రాంతాలుగా విభజించబడింది.

మొనతేలిన ఒక బల్లెం (Dart) ను ఆ బోర్డు పైకి విసిరిన అది ప్రాంతం Aలో తగిలే సంభావ్యత ఎంత?



## V. ప్రాతినిధ్యపర్చడం

11. కింది సమస్యలు సాధించండి. (2 × 5 = 10 మా.)

(a) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$ యొక్క రేఖా చిత్రమును గీయుము.

(b) $\sqrt{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

## అధ్యాయం - 8

# స్వీయ మూల్యాంకన పత్రం

## (Self Evaluation)

ఉపాధ్యాయుని పేరు : ______________ విద్యార్హతలు : ______________

హోదా : ______________ పాఠశాల : ______________

మండలం : ______________ జిల్లా : ______________

---

దిగువ నివ్వబడిన అంశాలను చదివి, మీరు శిక్షణా కార్యక్రమంలో పొందిన అనుభవాల ఆధారంగా మీ అభిప్రాయాలను తెలపండి.

| | | చాలాబాగా | బాగుగా | కొంతవరకు |
|---|---|---|---|---|
| 1) | శిక్షణా కార్యక్రమం నూతన పాఠ్యాపుస్తకాలకు అనుగుణంగా జరిగింది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 2) | నూతన పాఠ్యపుస్తకాల కీలక సూత్రాలు పాఠ్యాంశాలలో ప్రతిబింబించాయి. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 3) | అధ్యాయాల అమరిక శాస్త్రీయంగా ఉండి అన్నిరంగాల అధ్యాయాలకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వబడింది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 4) | పాఠ్యాంశాలలో పొందుపర్చిన భాష, ముద్రణ పిల్లల స్థాయికి తగినట్లు ఉన్నది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 5) | ప్రతీ అధ్యాయాన్ని విశ్లేషించుకొనే విధానం అవగాహన అయింది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 6) | పాఠ్యాంశాలలో అంశాలు విద్యాప్రమాణాలను అంచనా వేసే విధంగా ఏర్పరచబడ్డాయి. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 7) | విద్యార్థులలో రాత సమస్యలు సాధన పెంపొందించుటకు అవగాహన కలిగింది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 8) | 'సంభావ్యత', దాని అర్థము, అవసరం తెల్సింది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 9) | గణితంలో నిరూపణల అవసరాన్ని గుర్తించడమైనది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 10) | శిక్షణలో వివిధ అంశాలపై అభ్యసన ఆధారపత్రాల చర్చ జరిగింది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 11) | సంఖ్యావ్యవస్థలో కరణీయ సంఖ్యల ప్రాధాన్యత, గుర్తించే విధానం అవగాహన అయినది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 12) | బీజగణితంలో చరరాశి, సమీకరణం, రేఖీయ సమీకరణం ప్రాధాన్యత తెలిసింది. | ( ) | ( ) | ( ) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13) | రేఖాగణిత అధ్యయనానికి స్వీకృతాధార విధానం ప్రాధాన్యతలను గుర్తించడమైనది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 14) | జ్యామితీయ నిర్మాణాలను ప్రత్యేక శైలిలో చేయుటకు శిక్షణ దోహదపడుతుంది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 15) | దత్తాంశ నిర్వహణలో వివిధ సాంఖ్యకశాస్త్ర పద్ధతులు, రేఖాచిత్రాలపై అవగాహన ఏర్పడింది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 16) | వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములపై ప్రయోగాత్మక అవగాహన ఏర్పడింది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 17) | నూతన పాఠ్యాంశాల బోధనకు ఉపాధ్యాయుడు సన్నద్ధత కలిగివుండాలి. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 18) | ఉపాధ్యాయుడు పాఠ్యపుస్తకాలతోబాటు అదనపు సమాచారం, ప్రశ్నలు రూపొందించుకోవల్సిన అవసరం తెల్సింది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 19) | తరగతిలో ప్రతి విద్యార్థిని మదింపు చేయడానికి నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం దోహదపడుతుంది. | ( ) | ( ) | ( ) |
| 20) | విద్యా ప్రమాణాలకు అనుగుణంగా ప్రశ్నాపత్రాలు రూపకల్పన చేయుటకు శిక్షణ తోడ్పడుతుంది. | ( ) | ( ) | ( ) |

1) ఈ శిక్షణా కార్యక్రమంలో నాకు బాగా నచ్చిన సెషన్ : ____________________

కారణం : ____________________

2) ఈ శిక్షణా కార్యక్రమంలో నాకు నచ్చని సెషన్ : ____________________

కారణం : ____________________

శిక్షణార్థి సంతకం